

Chapitre 2

Calcul d'intégrale

2.1 Introduction

Pour calculer une intégrale, la méthode la plus simple est de trouver une primitive. Cependant, il est parfois difficile – voire même impossible – d'en trouver. C'est pourquoi des méthodes pour les calculer et les approximer ont été développées : intégration par parties, changement de variables, etc.

Une de ces méthodes consiste à ne plus étudier notre intégrale directement, mais plutôt une autre, sur un domaine complexe, puis d'utiliser les résultats d'analyse complexe, pour obtenir la valeur de notre intégrale initiale. Rappelons donc certaines notions.

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ définie sur un ouvert U de \mathbf{C} est *holomorphe* en un point z_0 de U si la limite suivante existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

et dans ce cas on la note $f'(z_0)$. On dira que f est *holomorphe* sur U si elle est holomorphe en tout point de U : on notera leur ensemble $\mathcal{H}(U)$.

L'un des principaux résultats sur les fonctions holomorphes sur un ouvert simplement connexe U de \mathbf{C} est le **théorème de Cauchy** qui affirme que pour tout lacet Γ inclus dans U on a :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

pour f holomorphe sur U . Le souci de ce résultat est qu'il arrive qu'on intègre sur un lacet où la fonction f est holomorphe sur le domaine étudié U sauf en certain(s) point(s) de U et que donc on ne puisse pas appliquer ce théorème :

c'est le cas dans ce développement. Pour cela on a besoin d'un outil appelé série de Laurent (il s'agit en fait d'une généralisation des séries entières) et des résidus.

Prenons une fonction $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe avec U un ouvert de \mathbf{C} et z_0 un élément de U . Alors on peut montrer que f admet un *développement de Laurent* en z_0 c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de z_0 relativement compact dans U et une suite complexe indexée sur \mathbf{Z} notée $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ tels que pour tout complexe z de V on ait

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On appellera dans ce cas le terme a_{-1} le *résidu* de f en z_0 et qu'on notera $\text{Res}(f, z_0)$. Cette propriété compliquée au premier abord semble ne pas avoir d'intérêt. Cependant, elle permet d'avoir le second théorème extrêmement important en analyse complexe, qui est :

Théorème 2. (Théorème des résidus)

Soit U un ouvert de \mathbf{C} et f holomorphe sur $U \setminus S$ avec S un sous-ensemble de U sans point d'accumulation dans U . Soit un compact K à bord régulier de U avec $\partial K \cap S = \emptyset$.

Alors S n'a qu'un nombre fini de points de K et on a :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z \in K \cap S} \text{Res}(f, z).$$

Le développement qui suit est un exemple d'application de ce théorème.

2.2 Développement

Proposition 3. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a

$$I_\alpha := \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Démonstration. I_α est bien définie comme intégrale d'une fonction mesurable positive. Or la fonction $u : t \mapsto \frac{t}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur \mathbf{R}_*^+ avec $u(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1/t^\alpha$ et $u(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 1/t^{\alpha+1}$: donc $I_\alpha < \infty$.

Soit $\Omega := \mathbf{C} \setminus [0, \infty[$ et f définie sur $\Omega \setminus \{-1\}$ par $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$, où on fait le choix $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{-1\})$ et possède un pôle simple en -1 avec $\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$. Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, on note $K_{\varepsilon,R}$ le compact suivant de contour noté $\Gamma_{\varepsilon,R}$, décrits sur la figure 2.1.

Le **théorème des résidus** donne $\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$. Calculons les quantités suivantes :

- ◇ $\left| \int_{\{|z|=\varepsilon, \text{Re}(z)\leq 0\}} f(z)dz \right| \leq \frac{\varepsilon\pi}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}\pi}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.
- ◇ Soit $E_{\varepsilon,R} = \{Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi], |\theta| \geq \theta_{\varepsilon,R}\}$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{E_{\varepsilon,R}} f(z)dz &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}} d\theta \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}} d\theta, \end{aligned}$$

par **théorème de convergence dominée**. Cependant, on a

$$\left| iR^{1-\alpha} \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

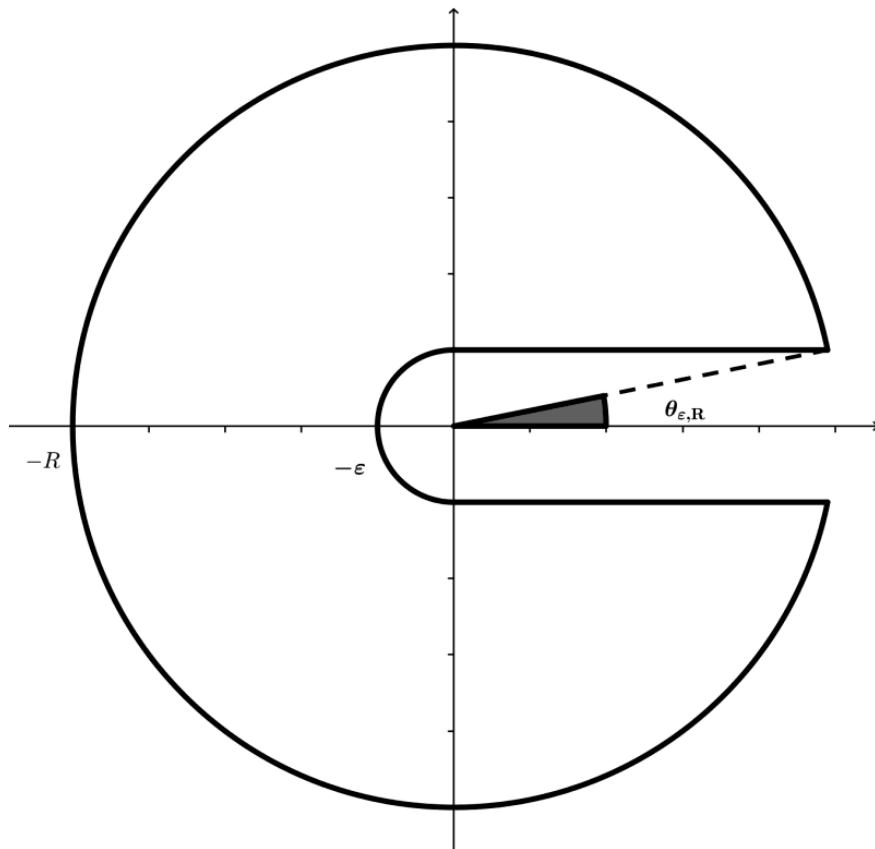
$\int_{[i\varepsilon, i\varepsilon+R]} f(z)dz = \int_0^R \frac{dt}{(t-i\varepsilon)^\alpha(1+t-i\varepsilon)}$. Or on a $|f(z-i\varepsilon)| \leq \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ pour tout $z \in \mathbf{R}$. Par **théorème de convergence dominée**, on obtient que $\int_{[i\varepsilon, i\varepsilon+R]} f(z)dz \rightarrow \int_0^R f(t)dt$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, puis vers I_α en faisant tendre R vers ∞ . De la même façon, comme $t+i\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} te^{-2i\pi}$, on prouve que :

$$\int_{[-i\varepsilon, -i\varepsilon+R]} f(z)dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-2i\pi\alpha} \int_0^R f(t)dt.$$

Ainsi en regroupant tout ce qui précède et en faisant tendre ε vers 0, puis R vers ∞ dans la formule donnée par les résidus, on obtient :

$$I_\alpha = \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

□

FIGURE 2.1 – Domaine $K_{\epsilon, R}$ de contour $\Gamma_{\epsilon, R}$.

Chapitre 3

Calcul d'une série *via* une EDO

3.1 Introduction

On sait montrer qu'une série converge grâce à de nombreuses propriétés : **règles de d'Alembert et de Cauchy, comparaison série/intégrale, produit de Cauchy**, etc.

Cependant trouver la valeur de la limite $\sum_{n \geq 0} a_n$ est une chose compliquée. La première idée est de définir la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et de trouver une équation (différentielle par exemple) sur celle-ci, puis de l'exprimer. Si le rayon de convergence est supérieur (strictement) à 1, alors il suffit d'évaluer la fonction en $x = 1$.

Par exemple, étudions $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$. Pour cela on définit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

On vérifie facilement que son rayon de convergence est infini et que sa somme vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Ainsi on obtient $f = \exp$ puis que :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \exp(1).$$

Cependant, les techniques peuvent se révéler plus compliquées que celle ci-dessus, comme dans le développement suivant. Dans celui-ci le plus gros du

travail sera l'étude de l'équation différentielle non linéaire : c'est pourquoi on va commencer par s'y intéresser, puis en déduire une somme.

3.2 Développement

Soit $\lambda > 0$. On notera (E) l'équation différentielle non linéaire $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$.

Remarque. L'équation homogène de (E) est $xy' = -\lambda y$ de solution $y(x) = \frac{C}{x^\lambda}$, pour une constante réelle C . Résolvons (E) par la **méthode de variation de la constante** : on cherche $C(x)$ avec $y(x) = \frac{C(x)}{x^\lambda}$. Ainsi on obtient :

$$C(x) = \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt.$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{1}{x^\lambda} \left[C + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt \right].$$

Proposition 4. (E) admet une unique solution ayant une limite finie en 0.

Démonstration. Comme $\frac{1}{x^\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$, il faut que $A + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt \rightarrow 0$ et donc $A = 0$ (par positivité de l'intégrale). Si une telle solution existe, alors elle est forcément unique.

Définissons $y(x) = \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu} du$. La fonction $(x, u) \mapsto \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu}$ est continue sur $\mathbf{R}^+ \times]0, 1]$ intégrable par rapport à u . De plus on a $\frac{u^{\lambda-1}}{1+xu} \leq u^{\lambda-1}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$. Donc y est continue puis $y(x)$ tend vers

$$\int_0^1 u^{\lambda-1} du = \frac{1}{\lambda}$$

quand x tend vers 0. La solution de (E) admettant une limite finie en 0 existe. \square

Proposition 5. La fonction $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\lambda+n} x^n$ est solution de (E) de rayon de convergence 1. Elle est l'unique solution développable en série entière (DSE) de (E) .

Démonstration. Notons b_n les coefficients de la série définissant f . Alors on a que $|\frac{b_{n+1}}{b_n}| \rightarrow 1$, donc son rayon de convergence vaut 1.

Prenons une solution y développable en série entière : $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
On a ainsi que :

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = xy'(x) + \lambda y(x) = \sum_{n \geq 0} (n + \lambda) a_n x^n.$$

On déduit de l'unicité du développement que $a_n = \frac{(-1)^n}{n + \lambda}$ puis l'unicité de cette solution. \square

Proposition 6. On a : $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n(1+3n)} = \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Démonstration. Par les propositions 4 et 5, on obtient que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda + n} x^n = \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+xu} du.$$

Choisissons $\lambda = 1/3$ et $x = 1/8$. Alors $3 \sum_n \frac{(-1)^n}{8^n(1+3n)} = \int_0^1 \frac{u^{-2/3}}{1+\frac{u}{8}} du$. Donc la somme S cherchée vaut :

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3} \int_0^1 \frac{u^{-2/3}}{8+u} du = \frac{8}{3} \int_0^1 \frac{w^{-2}}{8+w^3} 3w^2 dw = 8 \int_0^1 \frac{dw}{8+w^3} \\ &= 8 \int_0^1 \frac{dw}{(2+w)(4-2w+w^2)} \\ &= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{12(2+w)} + \frac{4-w}{12(4-2w+w^2)} \right) dw \\ &= 8 \int_0^1 \left(\frac{1}{12(2+w)} + \frac{2-2w}{24(4-2w+w^2)} + \frac{1}{4((w-1)^2+3)} \right) dw \\ &= \left[\frac{2}{3} \log(2+w) - \frac{1}{3} \log(4-2w+w^2) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{w-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\log 3}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

\square

Chapitre 4

Caractères et sous-groupes distingués

4.1 Introduction

Cette partie présente une application de la théorie des caractères. En effet, combien de personnes se sont dites : « C'est bien joli de construire des tables de caractères, mais à quoi ça sert ? » En fait, elles nous apprennent beaucoup de choses sur le groupe, par exemple la liste de ses sous-groupes distingués.

Rappelons-nous ce qu'est un sous-groupe distingué d'un groupe (G, \star) . Un sous-groupe H de G (noté $H \leq G$) est *distingué* (ce qu'on notera $H \trianglelefteq G$) si :

$$\forall g \in G, gHg^{-1} \subset H.$$

Un exemple (important pour le développement) est le suivant : si f est un morphisme de groupes de G dans G' , alors $\ker f := \{g \in G, f(g) = e_{G'}\}$ est distingué dans G .

Maintenant passons à une rapide présentation de la théorie des représentations de groupe. Une *représentation* du groupe fini G sur \mathbf{C} est un couple (V, π) avec V un \mathbf{C} -espace vectoriel et π un morphisme de G dans $GL(V)$.

Exemple. Soit V un espace vectoriel de base $(e_g)_{g \in G}$. On pose $\pi(h)e_g = e_{hg}$, pour tous éléments h et g de G . On étend la définition de π par linéarité. Ainsi (V, π) est une représentation de G , qu'on appelle *représentation régulière*.

Remarquons que si n est le cardinal de G , on a pour une représentation (V, π) :

$$\forall g \in G, \pi(g)^n = \pi(g^n) = \pi(e_G) = 1.$$