Chapitre 1

Rappels et compléments sur les fonctions d'une variable

1.1 Eclairages sur le cours

1.1.1 Fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Commençons ce chapitre par une précision sur la notation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui peut encore sembler étrange pour certains. Or le mathématicien ne cesse d'utiliser cette notation, qu'est-ce qui le motive ?

Eh bien c'est le souci de clarté, car au fil des siècles des notions sont apparues en grand nombre et aujourd'hui les mathématiques sont tellement grandes que les spécialistes d'un domaine ont de bonnes chances de ne rien comprendre à ce que font des spécialistes d'un autre domaine. Alors quand il s'agit d'une brave fonction, il suffit d'écrire clairement les ensembles qui sont en relation pour rassurer les mathématiciens, car on sait alors qu'on ne parle pas de l'océan d'autres possibilités.

Ainsi, lorsque l'on écrit :

$$f : E \to F$$

on annonce d'une part que la fonction f est définie sur l'ensemble E, donc que si on se donne $x \in E$, $f(x)$ a un sens. D'autre part, on annonce que $f(x) \in F$ pour n'importe quel $x \in E$.

Finalement, la notation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se résume en français par : f est une fonction réelle d'une variable réelle. On peut rencontrer d'autres situations plus fines, comme par exemple :

$$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

où l'on a donc indiqué que l'on notait $[a,b]$ un intervalle fermé, contenu dans $\mathbb{R}$, sur lequel f est définie. Le lecteur pourra repérer d'autres cas dans ses lectures ou les exercices, afin de donner corps à cette notation.

1.1.2 Modestes conseils pour la mémorisation

Les mathématiques ont une caractéristique qui plaît à certains, dont l'auteur, c'est qu'elles ne nécessitent pas de mémoriser énormément de choses. Une stratégie assez intéressante, c'est de mémoriser tout ce qu'il faut pour *retrouver* ce dont on a besoin, au moment où l'on en a besoin.

Pour fixer les idées, prenons l'exemple des fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si on doit calculer la dérivée des fonctions :

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & x^2, \\ x & \mapsto & x^3, \\ x & \mapsto & x^4, \\ x & \mapsto & x^5, \\ x & \mapsto & x^6, \end{array}$$

on conviendra aisément qu'il vaut mieux se souvenir de la formule générale $(x^n)' = nx^{n-1}$ que de se fatiguer à mémoriser la liste des dérivées, à savoir :

- la dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$,
- la dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$,
- la dérivée de $x \mapsto x^4$ est $x \mapsto 4x^3$,
- la dérivée de $x \mapsto x^5$ est $x \mapsto 5x^4$,
- la dérivée de $x \mapsto x^6$ est $x \mapsto 6x^5$.

Donc un premier conseil, c'est de trouver les éléments du cours qui suffisent à redéployer tout ce dont vous avez besoin.

Paradoxalement, un deuxième conseil c'est justement de mémoriser certains éléments spéciaux, même s'ils ne sont pas centraux. Si ces éléments reviennent souvent, il n'est pas judicieux de les redémontrer à chaque fois qu'on les rencontre. Il s'agit donc de voir :

- ce qui revient souvent et le mémoriser pour aller plus vite quand on travaille avec ;

— ce qui sera redémontré à chaque rencontre, c'est-à-dire assez rarement.
Une bonne nouvelle, c'est que ce qui revient souvent se mémorise plus facilement...

Une autre question, c'est de savoir quelle forme mémoriser : une formule ? Une figure ? Une phrase écrite ? Une phrase parlée ? Nous vous proposons de réfléchir à une autre question : vous est-il plus facile de mémoriser des informations orales ou écrites ? De l'ordre du langage ou bien d'ordre graphique ? Nous n'entrerons pas dans un long discours sur les processus de mémorisation, mais nous insisterons volontiers sur le fait que chacun a des préférences. Certains comprennent mieux et mémorisent mieux ce qui est écrit, d'autres ce qui est dit. Certains sont à l'aise avec des lettres, d'autres avec des figures. Nous vous invitons donc à savoir ce qui est facile pour vous, et savoir aussi que vous aurez besoin d'être plus patient lorsque vous tentez de mémoriser sur un mode qui n'est pas facile (ou pas encore) pour vous.

A titre d'exemple, nous avons rappelé sur la figure 1.1 les longueurs [1] correspondant aux trois principales fonctions de la trigonométrie. Il peut être judicieux de mémoriser un tel dessin, de savoir jouer avec (sur le papier ou en imagination), et à partir de là, de mémoriser d'autres éléments du cours. Par exemple, l'auteur utilise des dessins pour mémoriser que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ mais que $\sin(\pi + x) = -\sin x$. Evidemment, il faut jongler avec les dessins de manière à ne pas être piégé par des cas particuliers, mais certains lecteurs trouveront, nous l'espérons, plus de légèreté dans leur travail en utilisant des modes de mémorisation variés.

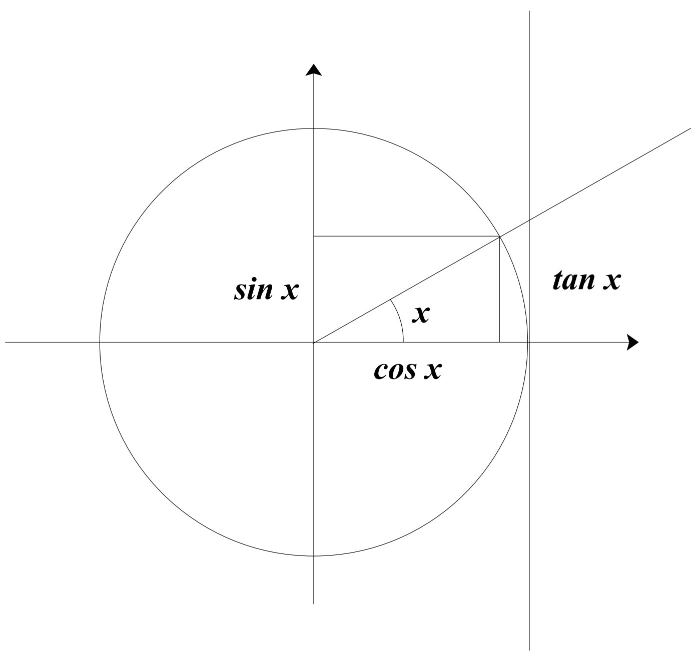

FIGURE 1.1 – Représentation géométrique des grandeurs $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$.

1. Compte tenu du fait que ces quantités sont munies d'un signe positif ou négatif selon l'angle x, il seraitplus juste de parler d'abscisses et d'ordonnées. Ceci est parfaitement clair en ce qui concerne $\cos x$ et $\sin x$, et nous pouvons considérer que $\tan x$ est projeté sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses. Le lecteur conviendra que la figure que nous proposons est plus facile à lire que si nous avions reporté la valeur de $\tan x$ sur l'axe des ordonnées, en tout cas nous l'espérons.

1.1.3 Continuité et dérivabilité : vivent les combinaisons !

La continuite et la dérivabilité d'une fonction ont ceci en commun qu'elles sont rarement utilisées à l'état de définition : un travail préliminaire permet d'établir que telle ou telle fonction est continue et/ou dérivable sur un certain ensemble, et ensuite on affirme par exemple qu'une fonction qui nous intéresse est continue parce que c'est la somme de deux fonctions continues. La définition de la continuité est donc « cachée » dans le travail préliminaire.

Bien que cet ouvrage ne prétende pas servir de cours, nous rappelons ici les définitions de la continuité et de la dérivabilité de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans ces définitions, nous considérons que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ afin de simplifier le propos.

Definition 1 (continuité) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Definition 2 (continuité sur un intervalle) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur l'ensemble I si elle est continue en tout point $c \in I$.*

Nous discuterons de la notion de continuité dans le paragraphe 1.1.6.

Definition 3 (dérivabilité) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c.$$

Dans ce cas, on appelle c le nombre dérivé.

Definition 4 (dérivabilité sur un intervalle) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur l'ensemble I si elle est dérivable en tout point $c \in I$.*

Le lecteur conviendra que ces définitions ne sont pas très explicites... Que faire quand on a une fonction à étudier ? Calculer des limites n'est pas toujours chose facile quand on ne dispose que de très peu d'outils. Le lecteur intéressé pourra tenter de montrer que $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ simplement avec la définition de la fonction sinus... Et on peut imaginer que, même si le travail n'est pas très difficile, il est un peu technique et prend un peu de temps à écrire. Mais admettons : avec un peu de courage, nous avons réussi à montrer que la fonction sinus était continue sur $\mathbb{R}$.

Nous continuons à travailler un peu, et nous avons une autre fonction à étudier, qui est maintenant $x \mapsto 2\sin x$. C'est presque la même chose que ce que nous venons de faire, mais ce n'est pas la même chose. La démonstration de la continuité fonctionnera-t-elle encore ? Pour les mêmes raisons ?

Et nous commençons à grogner quand vient une nouvelle fonction : $x \mapsto \sin x + x$, qui n'a pas l'air bien méchante, mais il faut encore une fois tout recommencer !

Dans l'intimité de ce livre, nous pouvons révéler un secret : le mathématicien est en général une certaine sorte de feignant. C'est la sorte de feignant qui accepte de faire un travail préliminaire, parfois lourd, pourvu qu'on lui promette que ça lui épargnera des efforts dans le futur. C'est pourquoi le mathématicien accueille avec un soulagement immense (n'ayons pas peur des mots) les résultats [2] suivants :

Proposition 1 (continuité de combinaisons de fonctions continues)
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et a un réel. Alors :
- *la fonction $f+g$ est continue sur $\mathbb{R}$,*
- *la fonction fg est continue sur $\mathbb{R}$,*
- *la fonction af est continue sur $\mathbb{R}$,*
- *la fonction $\frac{f}{g}$ est continue partout où g ne s'annule pas,*
- *la fonction $f \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Nous renvoyons à votre cours pour les détails concernant ces propriétés, mais nous souhaitons insister sur leur utilité : une fois qu'elles sont démontrées, alors nous sommes dans une situation complètement différente.

Si nous reprenons l'exemple précédent, où nous souhaitions montrer la continuité des fonctions :

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & \sin x \\ x & \mapsto & 2\sin x \\ x & \mapsto & \sin x + x \end{array}$$

Cette fois, il suffit de montrer une fois pour toutes que les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont continues, et alors nous pouvons affirmer que de très nombreuses fonctions sont continues, à commencer par les trois précédentes.

Et pour bien montrer à quel point la démonstration devient facile, on peut s'amuser à écrire de nombreuses fonctions dont on sait qu'elles seront continues sur $\mathbb{R}$. Supposons par exemple que nous avons démontré que les fonctions sinus, cosinus, et les x^n pour $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (ce qui est vrai). La démonstration de la continuité des fonctions suivantes est laissée à titre d'exercice :

Exercice 1 *Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & \sin x + \cos x \\ x & \mapsto & 2x^2 + \sin x \cos x \\ x & \mapsto & \dfrac{2x^2 + \sin x \cos x}{1+x^2} \\ x & \mapsto & \sin(x^4 + x^2) \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x + \cos x + \left(2x^2 + \sin x \cos x\right)\left(\sin(x^4+x^2)\right)}{1+x^2}. \end{array}$$

2. Lorsqu'un mathématicien parle de «résultat», il parle de propriétés qui viennent d'être démontrées. Par exemple : un résultat de convergence est en fait un théorème, où l'on a démontré la convergence de quelque chose...

Et la dérivabilité, alors ?

Si vous regardez bien votre cours, vous constaterez qu'il y a le même genre de théorèmes à propos de la dérivabilité. On peut même s'amuser à recopier la proposition sur la continuité et nous obtenons :

Proposition 2 (dérivabilité de combinaisons de fonctions dérivables)
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et a un réel. Alors :
— *la fonction $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,*
— *la fonction fg est dérivable sur $\mathbb{R}$,*
— *la fonction af est dérivable sur $\mathbb{R}$,*
— *la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable partout où g ne s'annule pas,*
— *la fonction $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Et ainsi, nous avons le même genre de démonstrations très faciles, pourvu que nous disposions de fonctions dont la dérivabilité a été démontrée.

Pour conclure

Finalement, pour la continuité comme pour la dérivabilité, nous sommes dans la situation suivante :
— la définition permet de justifier de la continuité/dérivabilité des fonctions usuelles : sinus, cosinus, polynômes, logarithme, exponentielle, etc. Ces démonstrations peuvent réclamer un certain travail et parfois de l'ingéniosité. Qui plus est, elles peuvent être assez différentes les unes des autres.
— Les fonctions que nous étudions sont presque toutes définies comme une combinaison, plus ou moins compliquée, de ces fonctions usuelles. Sauf exception, nous pouvons démontrer la continuité/dérivabilité grâce aux propriétés énoncées dans les propositions 1 et 2. Cette fois, les démonstrations de la continuité/dérivabilité sont très semblables, on ne fait que parler de somme, de produit, de quotient... Et c'est tellement plus facile...

Pour aller plus loin

Ici, nous avons expliqué la facilité avec laquelle nous pouvons démontrer la continuité/dérivabilité de fonctions qui s'expriment à l'aide d'autres fonctions continues/dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Gardons toutefois à l'esprit que nous rencontrons très souvent des fonctions qui ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais sur un ensemble plus petit, par exemple $\mathbb{R}^*$ ou bien $]0, +\infty[$. Dans ce cas, il faut adapter les propositions 1 et 2, et affiner la compréhension que l'on en a. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [5] par exemple (rappelons que l'on trouvera les références des ouvrages cités dans la bibliographie, à la fin de cet ouvrage).

1.1.4 Fonctions usuelles

Qui sont donc ces fameuses fonctions usuelles et pourquoi en parler ? Eh bien parce qu'elles sont la boîte à outils dans laquelle nous construirons la totalité des fonctions que nous étudierons. Qui plus est, ces fonctions répondent à des questions très importantes en mathématiques et en physique, et elles suffisent à résoudre de très nombreux problèmes usuels.

Quelles sont-elles ? Nous dressons un petit panorama des fonctions usuelles, avec quelques mots sur chaque catégorie pour les situer.

les polynômes Ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels. Ces fonctions ont une propriété majeure : on peut calculer $f(x)$ simplement avec les quatre opérations élémentaires [3]. Elles servent à chaque fois qu'on a envie de ramener un problème un peu difficile à une approximation plus simple, comme dans le chapitre sur les développements de Taylor (voir chapitre 2.1).

les fonctions trigonométriques et leurs réciproques Ce sont les fonctions sinus, cosinus, et la fonction tangente (qui peut se déduire de sinus et cosinus). Ces fonctions apparaissent dès que l'on fait de la géométrie où des angles apparaissent, mais aussi dès que l'on étudie des phénomènes liés à des rotations : quand ça pulse, oscille, gigote, il n'est pas rare que ce soient de simples cercles cachés derrière. Quant à leurs fonctions réciproques (qui sont vues dans la plupart des cours de mathématiques de niveau L1), ce sont les fonctions Arcsin, Arccos, Arctan, qui sont définies pour résoudre des équations où les fonctions trigonométriques interviennent.

les fonctions exponentielle et logarithme Elles sont réciproques l'une de l'autre, et l'exponentielle décrit les quantités qui croissent ou décroissent proportionnellement à elles-mêmes. Un exemple typique et méconnu est celui des entreprises qui veulent avoir une croissance de 5 % (par exemple) tous les ans. Si la quantité à augmenter vaut 100 au début, on veut donc une augmentation de 5 % de 100 la première année, 5 % de 105 la deuxième année, 5 % de 110,25 la troisième année, etc. Finalement, sans le savoir, ces entreprises cherchent une croissance exponentielle, et c'est bien douloureux dans de nombreux endroits après un certain temps.

Dans des domaines plus proches des sciences physiques, de très nombreux phénomènes conduisent à des fonctions exponentielles : diffusion de la chaleur ou de concentration d'une espèce chimique, désintégrations radioactives, etc. Il n'est donc pas étonnant de trouver ces fonctions un peu partout en physique, en cinétique chimique en particulier.

les fonctions puissance et leurs réciproques Vous connaissez depuis quelques années déjà la fonction carrée et sa réciproque la racine carrée. Vous pouvez identifier les nombreux cas où vous avez déjà rencontré d'autres puissances (par exemple le cube) et sa réciproque.

« Est-ce là tout ? » nous demanderez-vous ? Eh oui, car à part quelques menus ajouts telles que les fonctions hyperboliques, ces fonctions forment le gros des outils de base des mathématiciens. Evidemment, de nombreuses notions vont permettre de les combiner de façon très riche, mais insistons bien sur une chose : une connaissance

3. addition, soustraction, multiplication, division

raisonnable des fonctions usuelles rend éminemment confortable le travail en mathématiques. A bon entendeur...

1.1.5 Fonctions réciproques

La notion de fonction réciproque nécessite un peu de patience pour être assimilée, mais elle est précieuse. Comme souvent, elle est difficile à comprendre car les définitions arrivent très bien ficelées, alors qu'il y avait un échafaudage autour d'elles lorsqu'elles ont été construites... et celui-ci permettait de comprendre les tenants et les aboutissants. Ici, tentons de refaire le cheminement qui a conduit à la définition.

Un problème à résoudre

Posons-nous le problème très simple suivant :

$$\text{pour } c \in \mathbb{R}, \text{ trouver } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad x^4 = c. \tag{1.1}$$

Dans cette pièce de théâtre, nous avons les personnages suivants :
- la fonction $x \mapsto x^4$,
- le nombre $c \in \mathbb{R}$, qui est une donnée du problème,
- la ou les solutions (s'il en existe) $x \in \mathbb{R}$. S'il existe plusieurs solutions, deux par exemple, nous pourrions les noter x_1 et x_2.

Si nous connaissons un peu les propriétés de la fonction $x \mapsto x^4$, nous constatons que :
- si $c < 0$, il n'y a aucune solution réelle x ;
- si $c = 0$, il y a une unique solution, à savoir $x = 0$;
- si $c > 0$, il y a deux solutions, notons les x_1 et x_2.

Nous avons donc résolu ce problème. Pourquoi se tracasser à aller plus loin ?

Une solution utile pour autre chose

La réponse à la question précédente est simple : au lycée, une fois que l'on a résolu un problème, et brandi avec fierté la ou les valeurs des solutions, on s'arrête et on se repose. Mais le plus souvent, la résolution d'un problème n'est qu'une étape dans un travail plus vaste. C'est pour cela que l'on souhaite exprimer la solution d'une manière plus concise que de dire « et maintenant nous allons calculer le cosinus de cette valeur (la solution du problème de la page précédente) ». On comprend aisément que si le problème à résoudre s'écrit $f(x) = y$ alors on apprécierait de pouvoir écrire $f^{-1}(y)$ et ainsi $\cos\big(f^{-1}(y)\big)$.

Restriction, bijection

Puisque l'on souhaite écrire la solution x comme étant l'image de la donnée y, il va de soi qu'il faut que f^{-1} ne lui associe qu'une valeur... Si nous reprenons l'exemple de $x \mapsto x^4$, on peut décider de se restreindre à des ensembles plus petits.