

# PROBLÈME 1

## Projecteur vidéo-numérique

(concours Essaim 2005)

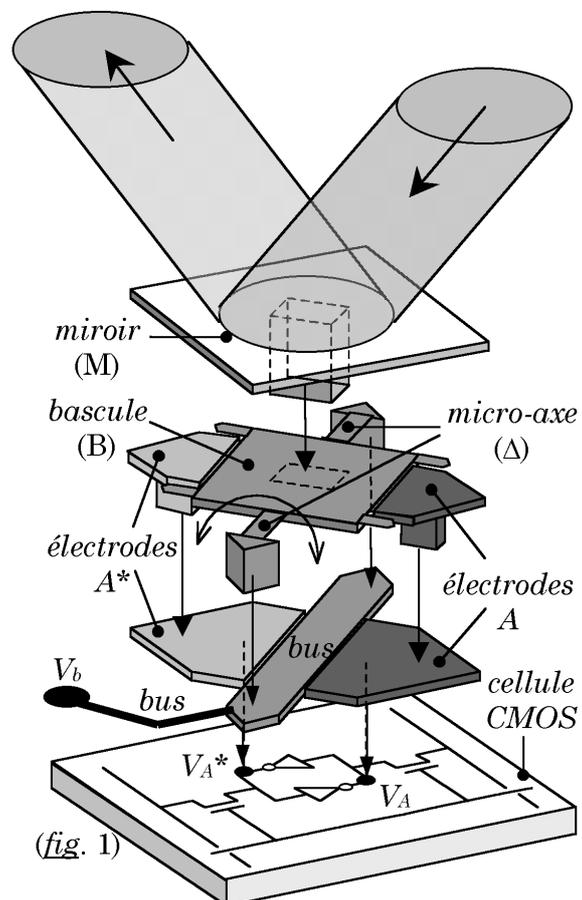
Le sujet proposé porte sur les **composants numériques à micromiroirs** (CNM, ou « DMD » en anglo-saxon) au cœur de nombreux projecteurs vidéo-numériques.

Le problème se compose de quatre parties pouvant être traitées indépendamment :

- ❑ le principe de la *commande électrostatique d'un micromiroir* (partie A) ;
- ❑ l'étude de la *commutation électromécanique d'un micromiroir* (partie B) ;
- ❑ l'analyse des *signaux de commande des pixels* de l'image numérique (partie C) ;
- ❑ l'étude générale de la *projection optique de l'image numérisée* sur écran (partie D).

L'architecture d'une cellule de base (*pixel*) du composant numérique à micromiroirs représentée ci-contre (*fig. 1*) comporte

- un *système électromécanique* formé d'un *miroir microscopique* (M) en aluminium fixé sur une *bascule métallique* (B) pouvant pivoter de  $\pm 10^\circ$  autour d'un *micro-axe* de torsion métallique ( $\Delta$ )
- une *cellule électronique de mémoire* à portes CMOS recevant les signaux cadencés de numérisation des images
- une *couche intermédiaire* de contacts électriques et d'électrodes reliant la cellule électronique au système électromécanique et fournissant les signaux de commande  $V_A$ ,  $V_{A^*}$  et  $V_b$  au micromiroir.

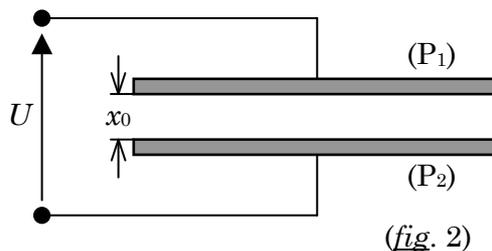


(fig. 1)

## A. COMMANDE ÉLECTROSTATIQUE DU MICROMIROIR

### A.1. CONDENSATEUR PLAN

Deux plaques métalliques planes parallèles rectangulaires (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) de largeur  $l$  et de longueur  $L$  sont placées en regard l'une de l'autre à une distance  $x_0$ . Une différence de potentiel continue  $U = V_1 - V_2$  est maintenue entre elles. On néglige toute influence extérieure (fig. 2)



On suppose  $x_0$  petit devant  $l$  et  $L$ , de sorte que le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$  entre les plaques sont invariants parallèlement aux plaques, et que les effets de bords sont négligeables.

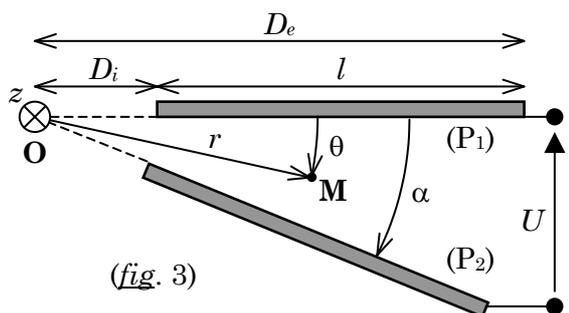
La permittivité électrique de l'air est assimilée à celle du vide ( $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ ).

- A.1.1. En raisonnant sur les symétries, déterminer la forme et le sens des lignes de champ électrostatique  $\vec{E}$  entre les plaques.
- A.1.2. Montrer que  $\vec{E}$  est uniforme entre les plaques.
- A.1.3. Préciser la répartition et la relation entre les charges électriques  $Q_1$  et  $Q_2$  portées respectivement par (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) à l'équilibre électrostatique, et expliquer en quoi les plaques forment un condensateur.
- A.1.4. Déterminer le module du champ électrostatique puis la capacité  $C$  du condensateur en fonction de  $l$ ,  $L$ ,  $x_0$  et  $\varepsilon_0$ .
- A.1.5. Rappeler l'expression de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e$  d'un condensateur en fonction de sa capacité  $C$  et de la tension  $U$ .
- A.1.6. Déterminer la force électrostatique  $\vec{F}$  subie par l'armature (P<sub>1</sub>) en fonction de  $U$ ,  $l$ ,  $L$ ,  $x_0$  et  $\varepsilon_0$ .

### A.2. CONDENSATEUR DIÉDRIQUE

Les plaques métalliques (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) forment maintenant un dièdre d'angle  $\alpha$ . On note Oz la droite d'intersection de leurs plans ;  $D_i$  sa distance à leurs bords intérieurs et  $D_e$  sa distance à leurs bords extérieurs. Une différence de potentiel continue  $U = V_1 - V_2$  est maintenue entre (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>).

On note  $r$ ,  $\theta$ , et  $z$  les coordonnées cylindriques d'un point M quelconque de l'espace entre les deux plaques (fig. 3).



- A.2.1. Les lignes de champ électrostatique  $\vec{E}$  entre les plaques sont des arcs de cercle centrés sur Oz, et le potentiel électrostatique  $V$  en M dépend que de  $\theta$ . Justifier simplement ces deux faits.
- A.2.2. De l'équation locale entre le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$  en M, déduire la relation entre le module  $E$  du champ, la dérivée  $V'(\theta)$  et  $r$ .
- A.2.3. En appliquant le théorème de Gauss à la surface élémentaire fermée comprise entre  $r + dr$ ,  $z$  et  $z + dz$  et  $\theta + d\theta$ , montrer que  $V'(\theta) = C^{te}$ .
- A.2.4. En déduire l'expression du potentiel  $V$  et du module  $E$  du champ en M.

A.2.5. Déterminer la *densité surfacique des charges*  $\sigma_1(r)$  sur (P<sub>1</sub>).

A.2.6. En déduire l'expression de la *capacité* du condensateur diédrique

$$C = \frac{\varepsilon_0 L}{\alpha} \ln \frac{D_e}{D_i}. \quad (1)$$

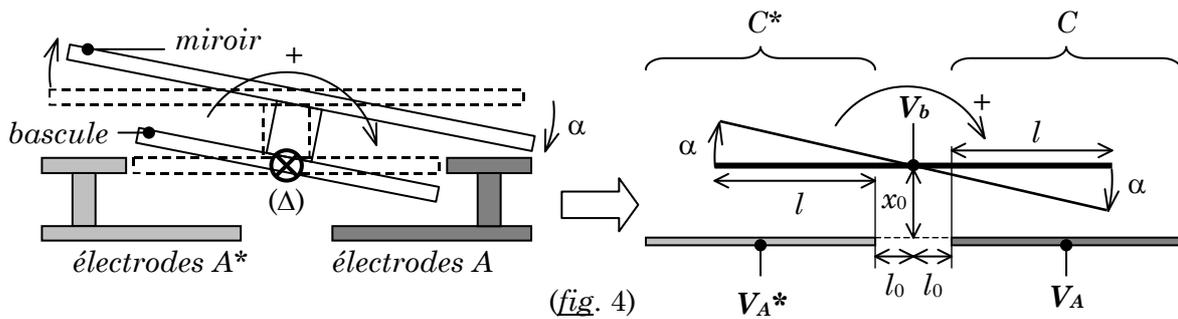
### A.3. MODÈLE ÉLECTROSTATIQUE DU MICROMIROIR

L'inclinaison  $\alpha$  du micromiroir {miroir (M), bascule (B)} par rapport au plan de la cellule CMOS (cf. *fig. 1*) est commandée par la différence entre son potentiel électrostatique  $V_b$  et les potentiels  $V_A$  et  $V_{A^*}$  des électrodes (A) et (A\*).

On représente le micromiroir par une bascule unique plane d'axe ( $\Delta$ ), constituée d'un rectangle métallique de largeur  $2(l + l_0)$  et de longueur  $L$ . Les électrodes (A) et (A\*) beaucoup plus larges sont séparées de  $2l_0$  (*fig. 4*).

L'ensemble {bascule, électrodes} équivaut à *deux condensateurs diédriques*  $\{C, C^*\}$  d'angle  $\alpha$ , l'un soumis à la tension  $U = V_b - V_A$  et l'autre à la tension  $U^* = V_b - V_{A^*}$ .

*Données* :  $L = 10 \mu\text{m}$  (profondeur) ;  $l = 5 \mu\text{m}$  (largeur) ;  $x_0 = 2 \mu\text{m}$  (distance centrale) ;  
 $l_0 = 2 \mu\text{m}$  (espacement des électrodes)



A.3.1. *Seules les surfaces en regard interviennent dans le calcul des capacités.* En utilisant l'expression (1) de la question A.2.6, montrer que les capacités électriques du micromiroir s'écrivent

$$C(\alpha) = \frac{\varepsilon_0 L}{\alpha} \ln \left( \frac{x_0 \cos \alpha - l_0 \sin \alpha}{x_0 - (l + l_0) \sin \alpha} \right) \quad \text{et} \quad C^*(\alpha) = \frac{\varepsilon_0 L}{\alpha} \ln \left( \frac{x_0 + (l + l_0) \sin \alpha}{x_0 \cos \alpha + l_0 \sin \alpha} \right).$$

A.3.2. Calculer  $C(0)$  et  $C^*(0)$  lorsque le micromiroir est parallèle à la cellule CMOS.

A.3.3. Le composant numérique comporte  $1024 \times 768$  micromiroirs. Lorsqu'il n'est pas sous tension, la capacité mesurée en reliant tous les bus d'un côté et toutes les électrodes de l'autre est  $C_t = 300 \text{ pF}$ . Est-ce cohérent avec le calcul précédent ?

A.3.4. Exprimer l'énergie électrostatique  $\mathcal{E}_e(\alpha)$  totale du micromiroir en fonction de  $U$ ,  $U^*$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $l$ ,  $L$ ,  $l_0$ ,  $x_0$  et de l'angle  $\alpha$ .

A.3.5.⊛ Justifier la relation  $M_e(\alpha) = d\mathcal{E}_e/d\alpha$  où  $M_e(\alpha)$  est le *moment résultant des forces électrostatiques* par rapport à l'axe de rotation ( $\Delta$ ) qui s'exercent sur le micromiroir. En déduire  $M_e(\alpha)$ .

A.3.6.⊛ Établir son expression ci-dessous pour  $\alpha = 0$  (position « plate ») en précisant son signe en fonction des valeurs relatives de  $U$  et  $U^*$  :

$$M_e(0) = \frac{\varepsilon_0 L}{2x_0^2} (l^2 + 2l_0 l - x_0^2) (U^2 - U^{*2}).$$

## B. COMMUTATION MÉCANIQUE DU MICROMIROIR

### B.1. MOMENT D'INERTIE DU MICROMIROIR

B.1.1. Rappeler la définition générale du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque  $(\Delta)$ .

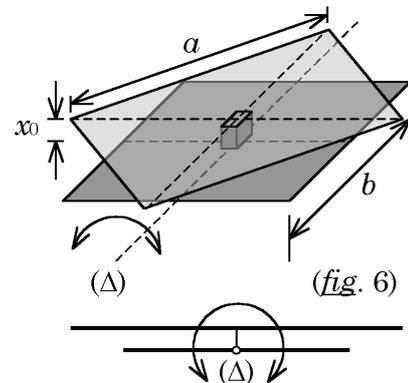
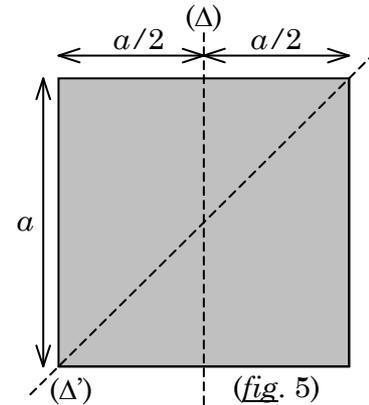
B.1.2. On considère une plaque carrée de côté  $a$ , d'épaisseur  $e$  très petite devant  $a$  et de *masse surfacique*  $\delta$ . Établir l'expression de son *moment d'inertie*  $J_{\Delta}$  par rapport à la droite  $(\Delta)$  joignant les milieux de deux côtés opposés (*fig. 5*) en fonction de  $a$  et de sa masse  $m$ .

B.1.3. Montrer que le moment d'inertie  $J_{\Delta}$  de la plaque par rapport à l'axe  $(\Delta')$  joignant deux sommets opposés est identique à  $J_{\Delta}$ .

B.1.4. Le *miroir* (M) est une plaque d'*aluminium* carrée de côté  $a = 14 \mu\text{m}$ , d'épaisseur  $e = 0,5 \mu\text{m}$  et de masse volumique  $\rho = 2700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . La *bascule* (B) est également une plaque carrée en *aluminium*, de côté  $b = 10 \mu\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 0,5 \mu\text{m}$ . Le *miroir* (M) et la *bascule* (B) sont assemblés parallèlement à une distance  $x_0 = 2 \mu\text{m}$  l'un de l'autre, avec leurs axes tournés de  $45^\circ$  au moyen d'une entretoise microscopique de masse négligeable (*fig. 6*).

L'ensemble du micromiroir peut pivoter autour de l'axe de rotation médian  $(\Delta)$  de la *bascule* (B).

Calculer la valeur du *moment d'inertie total*  $J_{\Delta}$  du micromiroir par rapport à  $(\Delta)$ .



### B.2. RÉPONSE DU MICROMIROIR À UNE IMPULSION ÉLECTRIQUE $V_b(t)$

Initialement, le micromiroir est en butée avec une inclinaison  $\alpha = +10^\circ$  en position « 1 » ( $V_b = 22 \text{ V}$  ;  $V_A = 0 \text{ V}$  ;  $V_{A^*} = 5 \text{ V}$ ).

Pour le commuter en butée avec une inclinaison  $\alpha = -10^\circ$  (position « 0 »), la nouvelle adresse ( $V_A = 5 \text{ V}$  ;  $V_{A^*} = 0 \text{ V}$ ) est envoyée dans la cellule CMOS, puis une *impulsion de lancer*  $V_b = 24 \text{ V}$  est envoyée sur le bus pendant  $0,3 \mu\text{s}$ , suivie d'une *impulsion de lâcher*  $V_b = 5 \text{ V}$  pendant  $0,9 \mu\text{s}$ , puis d'un *échelon de capture*  $V_b = 22 \text{ V}$  (*cf. fig. 7*).

Les forces électrostatiques exercées par les électrodes (A) et (A\*) sur le micromiroir produisent un *moment électrostatique*  $M_e(\alpha)$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  exactement calibré pour opérer la commutation (*cf. question A.3.5*).

L'axe  $(\Delta)$  est constitué de deux microrubans plats exerçant sur le micromiroir un *couple de torsion* de moment  $M_r = -K\alpha$  où  $K = 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$  est la *constante de torsion* des microrubans.

La *bascule* est munie de quatre pointes-ressorts (*cf. fig. 1*) pour vaincre les forces d'attraction moléculaire de Van der Waals exercées par les butées. Ces pointes-ressorts exercent un *moment de rappel élastique* supplémentaire  $M_p = -K'(\alpha - \alpha_c)$  si  $|\alpha| > |\alpha_c|$ , et  $M_p = 0$  si  $|\alpha| < |\alpha_c|$ , où  $\alpha_c$  est l'angle de la bascule au moment du contact entre les pointes et les butées, et  $K'$  est la *constante de rappel élastique*.

Le *moment résistant des forces de Van der Waals*  $M_w(\alpha)$  par rapport à  $(\Delta)$  n'est pris en compte que si  $|\alpha| > |\alpha_c|$ .

On néglige la pesanteur et le frottement de l'air (les micromiroirs sont encapsulés sous vide), mais la dissipation d'énergie pendant le contact produit un *moment de frottement*  $M_f = -f d\alpha/dt$  où  $f$  est une constante positive.

1. PROJECTEUR VIDÉO-NUMÉRIQUE

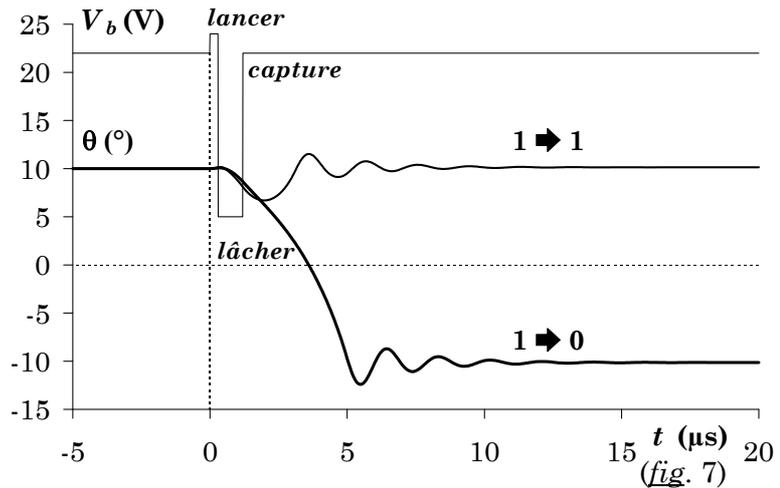
B.2.1. Établir l'équation différentielle du second ordre régissant  $\alpha$  en fonction du temps  $t$  lors du mouvement général du micromiroir lorsque l'impulsion de tension  $V_b(t)$  est appliquée à partir de  $t = 0$ .

B.2.2. Montrer qu'elle peut être mise sous la forme  $\ddot{\alpha} = F(\alpha, \dot{\alpha})$ , où  $F(\alpha, \dot{\alpha})$  est une fonction dont on donnera l'expression en fonction des données précédentes.

B.2.3. Pour résoudre l'équation, on peut appliquer différentes méthodes numériques. Proposer brièvement un algorithme simple basé sur la *méthode d'Euler* permettant d'obtenir l'angle  $\alpha$  en fonction du temps  $t$  discrétisé en intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  sur tableur informatique.

B.2.4. Le chronogramme ci-contre (*fig. 7*) montre l'effet de l'impulsion  $V_b(t)$  sur le micromiroir selon que l'adresse mémorisée dans la cellule CMOS sous-jacente a été mise préalablement à « 0 » ou à « 1 ».

Expliquer la forme des deux réponses « 1 → 0 » et « 1 → 1 » du micromiroir, et justifier les trois phases « lancer → lâcher → capture » de l'impulsion  $V_b(t)$ .



B.2.5. Calculer la *période propre*  $T_0$  des oscillations libres du micromiroir autour de la position de repos en l'absence de tension et de frottement (avec  $J_\Lambda = 10^{-24}$  en unité SI), et la comparer au *temps de commutation optique*  $\tau_{opt}$  pour passer de  $\alpha = 0^\circ$  à  $-10^\circ$ .

## C. NUMÉRISATION DE L'IMAGE

### C.1. MODULATION PAR LARGEUR D'IMPULSION BINAIRE

Chacun des  $1024 \times 768$  pixels d'une image numérique doit restituer suffisamment de nuances de gris entre le blanc et le noir. On obtient ce résultat en basculant le micromiroir correspondant à chaque pixel en position « 1 » (*blanc*) et « 0 » (*noir*) pendant des durées variables à l'intérieur d'une séquence de durée constante découpée sur 8 « bits » en 8 intervalles de durées décroissantes  $\{2^7 t_b, 2^6 t_b, 2^5 t_b, 2^4 t_b, 2^3 t_b, 2^2 t_b, 2^1 t_b, 2^0 t_b\}$  où  $t_b$  est la *durée de l'impulsion de base* (*fig. 8*).



(*fig. 8*)

Une nuance de gris se traduit par un mot de 8 « bits »  $\{b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, b_0\}$  envoyé aux électrodes (A) et (A\*) du micromiroir pour le commuter en modulant la largeur des impulsions  $b_i = \text{« 1 »}$  ou « 0 » adressées *successivement* dans l'ordre du « bit » de poids le plus fort  $b_7$  au « bit » de poids le plus faible  $b_0$ .

C.1.1. Quelle est la durée totale  $t_s$  de chaque séquence en fonction de  $t_b$  ?

C.1.2. Quel mot de 8 « bits » faut-il envoyer pour obtenir un éclaircissement de 40% (expliquer le calcul) ?

## C.2. REPRÉSENTATION DE L'IMAGE NUMÉRIQUE

La durée d'une séquence vidéo (image) couleur est  $T_s = 16$  ms. La restitution des couleurs est obtenue en éclairant tous les pixels en lumière Rouge, puis Verte puis Bleue pendant  $T_s/3$  au moyen d'un filtre rotatif.

C.2.1. Quel est le nombre de « bits » nécessaire pour coder chaque pixel en couleur et nuances de gris ?

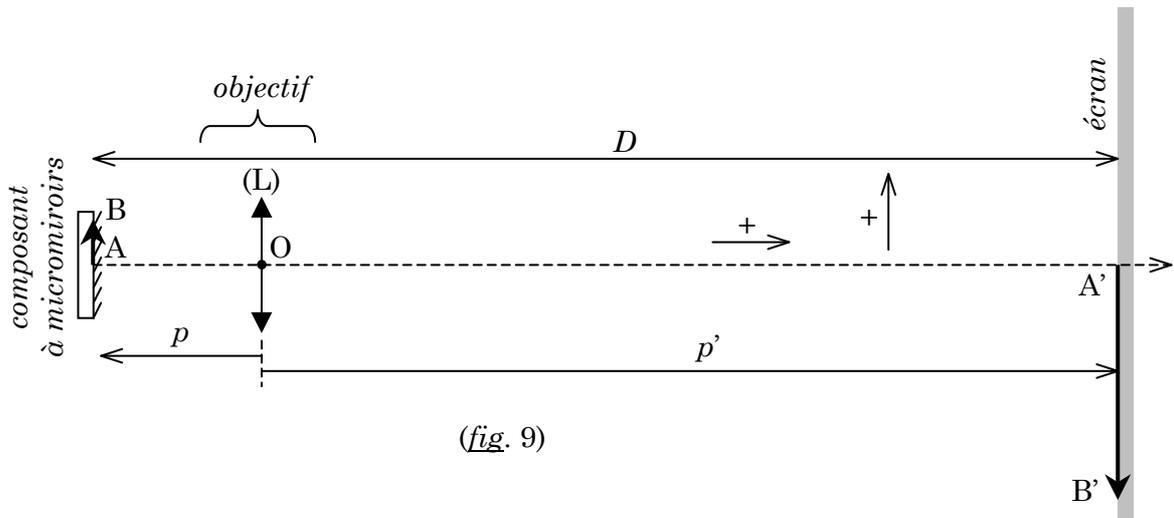
C.2.2. Quelle est la durée *maximale* de l'impulsion de base  $t_b$  ? Est-elle compatible avec le temps de commutation optique  $\tau_{opt}$  d'un micromiroir ?

## D. PROJECTION OPTIQUE DE L'IMAGE NUMÉRISÉE

Le vidéoprojecteur est conçu pour projeter les images sur un écran (E) distant de  $D$  du composant numérique à micromiroirs (CNM) éclairé par une lampe à *halogène* ou à *néon*. La matrice  $1024 \times 768$  des micromiroirs (pixels) constitue l'objet lumineux (AB), dont l'image (A'B') sur l'écran est obtenue grâce à un objectif que l'on assimilera à une *lentille mince convergente* (L) de *centre optique* O et de *distance focale image*  $f'$ .

Par convention, les distances sont comptées *algébriquement* de gauche à droite le long de l'axe optique de (L) et de bas en haut perpendiculairement à lui (*fig. 9*).

Les angles sont suffisamment petits pour que l'*approximation de Gauss* s'applique.



### D.1. CHOIX DE L'OBJECTIF

D.1.1. Exprimer le *grandissement*  $\gamma = \overline{A'B'} / \overline{AB}$  en fonction de  $p = \overline{OA}$  et  $p' = \overline{OA'}$ .

D.1.2. La taille de la matrice (AB) est de  $14 \text{ mm} \times 10,5 \text{ mm}$ . On souhaite obtenir une image (A'B') d'environ  $1,6 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}$ . Quelle doit être la valeur du *grandissement*  $\gamma$  ?

D.1.3. Rappeler la *relation de conjugaison de Descartes* entre  $p$ ,  $p'$  et  $f'$ .

D.1.4. Exprimer  $f'$  uniquement en fonction de  $\gamma$  et de la distance  $D = \overline{AA'}$ .

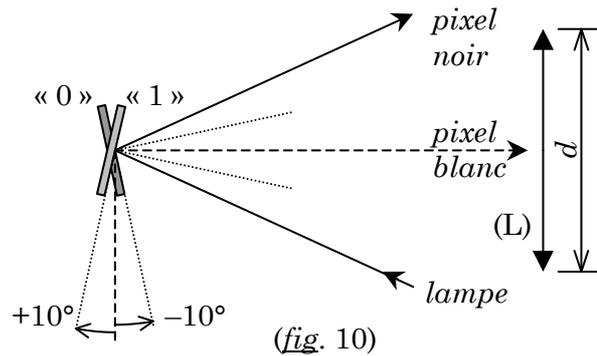
D.1.5. On souhaite que le *grandissement*  $\gamma$  calculé soit obtenu pour  $D \approx 6 \text{ m}$ . Quelle est la valeur de la *distance focale*  $f'$  nécessaire ?

D.1.6. On choisit  $f' = 50 \text{ mm}$ . Calculer les valeurs  $p_{max}$  et  $p_{min}$  de  $p$  entre (L) et (AB) pour que l'image se forme respectivement à l'infini puis à  $D_{min} = 1,4 \text{ m}$ .

1. PROJECTEUR VIDÉO-NUMÉRIQUE

D.1.7. Le *diamètre d'ouverture*  $d$  de l'objectif doit être suffisamment petit pour que la lumière réfléchie par les micromiroirs en position « 0 » (pixels *noirs*,  $\alpha_0 = -10^\circ$ ) ne puisse pas traverser l'objectif distant de  $-p_{max}$  (fig. 10).

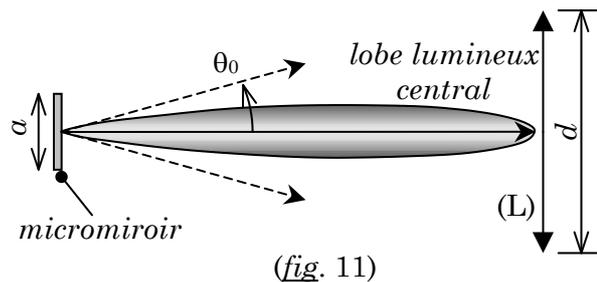
En déduire l'*ouverture numérique minimale*  $N = f'/d$  de l'objectif en fonction de  $|\alpha_0|$ , et calculer sa valeur.



D.1.8. L'essentiel de l'énergie lumineuse réfléchie par chaque micromiroir de côté  $a = 14 \mu\text{m}$  est inévitablement dispersée dans un cône d'angle au sommet  $\alpha_0$  tel que  $\sin \theta_0 \approx \lambda/a$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de la lumière réfléchie (fig.11).

À quel phénomène optique est due cette dispersion spatiale de la lumière ?

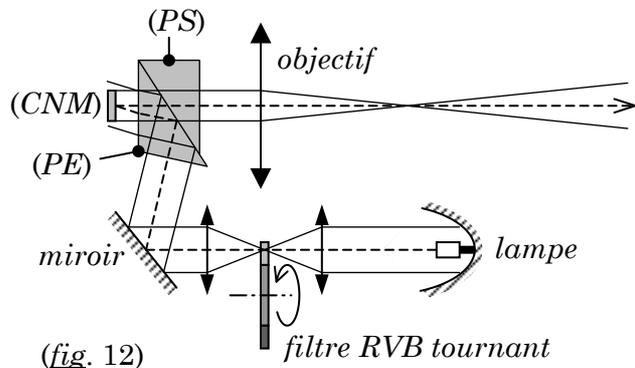
Quelle est l'*ouverture numérique maximale*  $N = f'/d$  de l'objectif pour que toute la lumière diffractée traverse la lentille lorsque le micromiroir est en position « 1 » (pixel *blanc*) en lumière rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ) ?



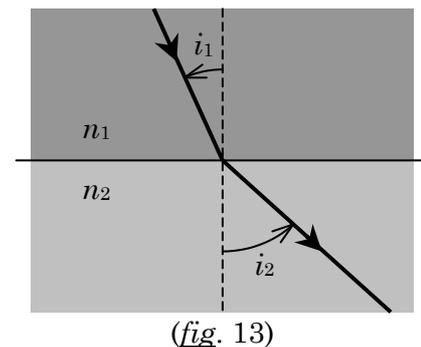
D.1.9. On impose  $N = 3$ . Commenter.

D.2. CALCUL DES PRISMES DE RENVOI

En vue d'obtenir une grande compacité du vidéoprojecteur et pour contourner l'obstacle que représente l'objectif, on utilise un prisme d'entrée (PE) et un prisme de sortie (PS) accolés pour renvoyer la lumière de la lampe vers le composant à micromiroirs (CNM), et guider la lumière réfléchie vers l'objectif (fig. 12). Les deux prismes sont taillés dans le même verre d'indice  $n = 1,5$ .



D.2.1. Rappeler la *loi de la réfraction* de Snell-Descartes à l'interface de deux milieux transparents d'indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ , reliant les angles d'incidence  $i_1$  et de réfraction  $i_2$  d'un rayon lumineux par rapport à la normale au plan de l'interface (fig. 13).



D.2.2. On suppose que le milieu d'incidence est le verre d'indice  $n_1 = 1,5$  et le milieu d'émergence est l'air d'indice  $n_2 = 1$ . Expliquer ce qu'est le phénomène de *réflexion totale* et calculer l'angle d'incidence limite  $\Lambda$  correspondant (faire un schéma explicatif).

D.2.3. Les angles  $\beta$  et  $\delta$  du prisme (PE) doivent permettre au faisceau issu de la lampe d'arriver en *incidence normale* sur la face (IJ) et de se réfléchir par *réflexion totale* sur la face (IK) avec un angle d'incidence  $i$  (fig. 14). Les faces (JK) et (I'J') sont parallèles au plan du (CNM).

Le faisceau lumineux sortant du prisme (PE) par la face (JK) avec un angle  $\theta_i$  doit se réfléchir sur les micromiroirs en position « 1 » (pixels blancs) pour retraverser la face (JK) en incidence normale puis l'objectif parallèlement à son axe (cf. fig. 10).

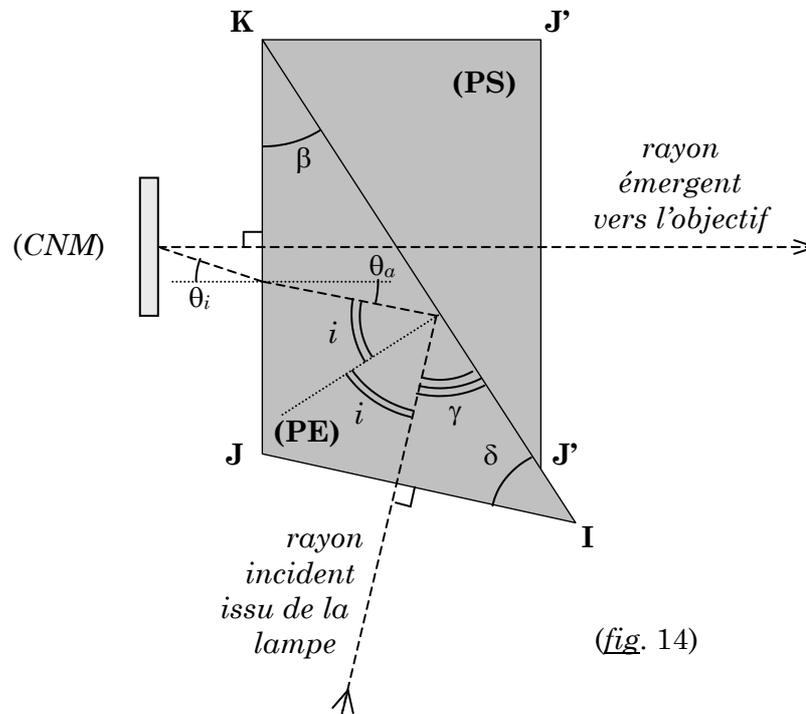
D.2.3.1. En déduire la valeur de l'angle d'arrivée  $\theta_a$  du faisceau sur la face (JK).

D.2.3.2. Exprimer  $\theta_a$  uniquement en fonction des angles  $i$  et  $\beta$ .

D.2.3.3. Quelle est la condition sur  $i$  pour que le faisceau incident se réfléchisse bien sur la face (IK) ? Quelle valeur limite  $\beta_1$  de  $\beta$  en déduit-on ?

D.2.3.4. Quelle est l'autre valeur limite  $\beta_2$  de  $\beta$  permettant que le faisceau réfléchi sur le composant à micromiroirs traverse bien l'interface (IK) ?

D.2.3.5. On choisit d'imposer  $i = 45^\circ$ . Calculer  $\beta$  et  $\delta$ .



(fig. 14)

Données :

- permittivité du vide :  $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36 \pi 10^9}$
- en repère cylindrique  $\{O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ , les coordonnées d'un point M sont notées  $(r, \theta, z)$ , avec  $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$
- le *gradient* d'une fonction scalaire  $V(r, \theta, z)$  est  $\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$  et son *laplacien* est  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$
- la *divergence* d'un champ vectoriel  $\vec{E}(r, \theta, z)$  est  $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ .