

# Chapitre 1

## Notions de base

### 1 Ce qu'il faut savoir

#### 1.1 Définition et vocabulaire

##### Définition 1.1

Un graphe  $G$  est un couple  $(X, E)$  où  $X$  est un ensemble *fini et non vide* d'éléments appelés **sommets** et  $E$  est un ensemble de paires d'éléments de  $X$  appelées **arêtes**.

##### Rappels

1. Un ensemble est une « structure » non ordonnée dans laquelle les éléments n'apparaissent qu'une et une seule fois. On écrit la liste des éléments entre accolades. (Voir annexe A)
2. Une paire est un ensemble de cardinal égal à 2 (c'est-à-dire un ensemble ayant deux éléments).

##### Remarque 1.1

- Nous avons choisi, pour des raisons pratiques, dans notre définition des graphes, de ne pas considérer les graphes sans sommet.
- Il existe d'autres types de graphes : les multigraphes définis dans l'annexe B, les graphes orientés définis dans l'exercice 3.3... La définition que nous donnons est celle des graphes simples et non orientés (« simples » parce qu'il ne peut y avoir au maximum qu'une seule arête entre 2 sommets et « non orientés » parce qu'une arête est un sous-ensemble de cardinal 2 et n'a donc pas d'ordre). Dans toute la suite, le mot « graphe » désignera un graphe simple et non orienté.

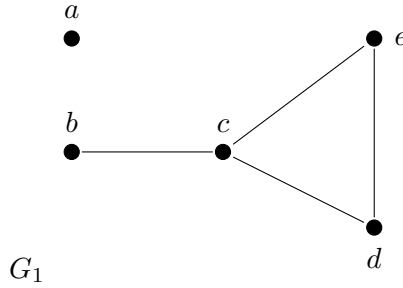
**Exemple 1.1**

$G_1 = (X = \{a, b, c, d, e\}, E = \{\{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, c\}\})$ .

Par commodité, on notera  $bc$  au lieu de  $\{b, c\}$ . On a donc  $bc = cb$ . Il est donc possible de réécrire le graphe  $G_1$  de la façon suivante :

$G_1 = (X = \{a, b, c, d, e\}, E = \{bc, cd, de, ec\})$ .

On peut représenter un tel graphe par un schéma ou une matrice d'adjacence.



Avant de définir une matrice d'adjacence du graphe  $G$ , il faut se donner un ordre sur les sommets, par exemple  $(a, b, c, d, e)$ . La matrice d'adjacence de  $G$  correspondant à cet ordre sur les sommets est :

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne est égal à 1 si et seulement s'il y a une arête entre le  $i$ -ème sommet et le  $j$ -ème sommet, il est égal à 0 sinon.

**Remarque 1.2**

Aucune des deux représentations précédentes n'est unique.

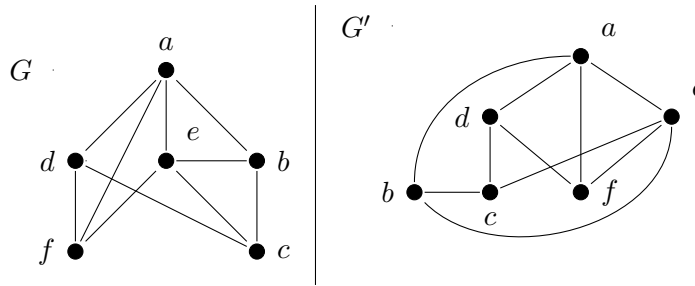
**Définition 1.2**

Deux graphes  $G = (X, E)$  et  $G' = (X', E')$  sont **égaux** si et seulement si  $X = X'$  et  $E = E'$ .

**Remarque 1.3**

Cette définition de l'égalité des graphes découle naturellement de celle de l'égalité des couples.

**Entraînez-vous !** Les graphes  $G$  et  $G'$  dont on donne une représentation ci-après, sont-ils égaux ?



### Vocabulaire et notations

#### 1. Ordre d'un graphe :

Le nombre  $n$  de sommets s'appelle l'**ordre** du graphe  $G$ . On le note parfois  $|G|$  (qui est donc égal au cardinal de l'ensemble  $X$ , noté  $|X|$ ). C'est aussi le nombre de lignes ou de colonnes d'une matrice d'adjacence du graphe.

#### 2. Taille d'un graphe :

Le nombre  $m$  d'arêtes s'appelle la **taille** du graphe  $G$ . On le note parfois  $\|G\|$  (qui est donc égal à  $|E|$ ). C'est aussi le nombre de « 1 » divisé par 2 d'une matrice d'adjacence du graphe.

Dans l'exemple 1.1,  $|G_1| = 5$  et  $\|G_1\| = 4$ .

#### 3. Sommets voisins :

Si  $e = xy$  est une arête de  $G$ , on dit que  $x$  et  $y$  sont des sommets **voisins** ou **adjacents** et  $e$  est une arête **incidente** aux sommets  $x$  et  $y$ . Dans l'exemple 1.1, les sommets  $b$  et  $c$  sont voisins tandis que  $b$  et  $d$  ne le sont pas. Le sommet  $a$  n'a aucun voisin.

Dans un graphe simple et non orienté, un sommet ne peut être son propre voisin.

#### 4. Voisinage d'un sommet :

Le **voisinage** d'un sommet  $x$  de  $G$ , noté  $V_G(x)$ , est l'ensemble de ses voisins. Dans l'exemple 1.1, on a  $V_{G_1}(d) = \{c, e\}$  et  $V_{G_1}(a) = \emptyset$ .

#### 5. Degré d'un sommet :

Le **degré d'un sommet**  $x$  est le cardinal de  $V_G(x)$ . On le note  $\deg_G(x)$ .

Dans l'exemple 1.1, on a  $\deg_{G_1}(c) = 3$  car  $V_G(c) = \{b, d, e\}$ .

- (a) Le degré d'un sommet est donc égal au nombre de fois où ce sommet apparaît comme extrémité d'une arête.

En reprenant l'exemple 1.1 avec

$G_1 = (X = \{a, b, c, d, e\}, E = \{bc, cd, de, ec\})$ , on a  $\deg_{G_1}(c) = 3$  car  $c$  a 3 occurrences dans  $E$ .

- (b) Dans la représentation graphique d'un graphe, le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

- (c) Dans la représentation matricielle d'un graphe, le degré d'un sommet est égal au nombre de « 1 » sur la ligne correspondant à ce sommet.

**6. Sommet isolé :**

Un sommet de degré 0 est un **sommet isolé**.

Dans l'exemple 1.1, le sommet  $a$  est un sommet isolé.

**7. Opérations ensemblistes et graphes :**

Soit  $G = (X, E)$  et  $G' = (X', E')$  deux graphes.

(a) **Réunion de graphes :**

On définit le graphe  $G \cup G'$  de la façon suivante :

$$G \cup G' = (X \cup X', E \cup E').$$

(b) **Intersection de graphes :**

On définit le graphe  $G \cap G'$  de la façon suivante :

$$G \cap G' = (X \cap X', E \cap E').$$

(**Attention :** La définition de  $G \cap G'$  n'a de sens que si  $X \cap X' \neq \emptyset$ .)

(c) **Suppression d'un sommet :**

Pour tout  $x \in X$ , on notera  $G - \{x\}$  (ou plus simplement  $G - x$ ) le graphe obtenu à partir de  $G$  en retirant le sommet  $x$  ainsi que les arêtes incidentes à  $x$ . Plus généralement, pour tout sous-ensemble  $S \subseteq X$ , on notera  $G - S$ , le graphe obtenu à partir de  $G$  en retirant les sommets de  $S$  ainsi que les arêtes ayant une ou deux extrémités dans  $S$ .

(d) **Suppression d'une arête :**

De la même manière, pour tout  $e \in E$ , on notera  $G - \{e\}$  (ou  $G - e$ ) le graphe obtenu à partir de  $G$  en retirant l'arête  $e$ .

On a donc  $G - \{e\} = (X, E - \{e\})$ .

Plus généralement, pour tout sous-ensemble  $A \subseteq E$ , on notera  $G - A$ , le graphe obtenu à partir de  $G$  en retirant les arêtes de  $A$ .

(e) **Ajout d'une arête :**

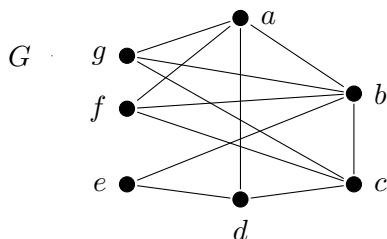
Si  $e$  est une paire de sommets de  $X$  n'appartenant pas à  $E$ , on notera  $G + \{e\}$  (ou  $G + e$ ) le graphe obtenu à partir de  $G$  en rajoutant l'arête  $e$ .

On a donc  $G + \{e\} = (X, E \cup \{e\})$ .

**Remarque 1.4**

Lorsque l'ordre et la taille d'un graphe deviennent trop importants, la représentation du graphe par un schéma ou une matrice peut manquer de clarté.

La définition théorique par l'ensemble des sommets et celui des arêtes est encore plus confuse. Il peut être pratique de représenter le graphe en donnant le voisinage de chacun des sommets.



Par exemple, le graphe dont une représentation est donnée ci-dessus, peut être décrit par le tableau suivant :

| sommet | voisinage           |
|--------|---------------------|
| a      | $\{b, d, f, g\}$    |
| b      | $\{a, c, e, f, g\}$ |
| c      | $\{b, d, f, g\}$    |
| d      | $\{a, c, e\}$       |
| e      | $\{b, d\}$          |
| f      | $\{a, b, c\}$       |
| g      | $\{a, b, c\}$       |

Plus généralement, le voisinage d'un sommet sera considéré comme une information facilement accessible à partir de la description du graphe (ou du stockage informatique du graphe). La plupart des théorèmes et des algorithmes qui suivront, utilisera des informations « locales » (comme le voisinage ou le degré) pour obtenir des informations « globales » sur le graphe.

## 1.2 Somme des degrés, séquence, graphe complémentaire

### Proposition 1.1

Soit  $G = (X, E)$  un graphe. On a  $\frac{1}{2} \sum_{x \in X} \deg_G(x) = \|G\|$ .

Cela signifie que le nombre d'arêtes est égal à la moitié de la somme de tous les degrés.

**Preuve.** En sommant les degrés de tous les sommets, on compte une fois chaque extrémité de toutes les arêtes. Une arête ayant deux extrémités, on en déduit la proposition ci-dessus. (« Pour compter les moutons, on peut compter les pattes et diviser par 4 ». Donc pour compter les arêtes, on peut compter les extrémités et diviser par 2.) ■

### Application

Dans une assemblée de dix personnes, chaque membre serre la main de tous les autres. Combien y aura-t-il de poignées de mains ?

*Réponse.*

Notons  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  cette assemblée et modélisons la situation par un graphe  $G$  dont les sommets sont les éléments de l'ensemble  $X$  et dont les arêtes représentent les poignées de mains.

On a  $\deg_G(1) = 9$  car 1 est voisin de tous les autres sommets (il a serré les mains de tout le monde) ; de même  $\deg_G(2) = \deg_G(3) = \dots = \deg_G(10) = 9$ .

On peut donc en conclure que  $\frac{\sum_{x \in X} \deg_G(x)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2}$ . Il y a donc 45 arêtes dans ce graphe et donc 45 poignées de mains.

(On pouvait aussi conclure en remarquant qu'une arête est une combinaison de 2 éléments parmi les 10 éléments de  $X$ , voir annexe A. Il y a donc  $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2}$  arêtes.)

### Notations.

Pour un ensemble  $X$  de sommets, on notera  $P_2(X)$ , l'ensemble de toutes les arêtes ayant leurs 2 extrémités dans  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble de toutes les parties de  $X$  (ou les combinaisons de  $X$ ) à deux éléments. On a donc :

$P_2(\{a\}) = \emptyset$ ,  $P_2(\{a, b\}) = \{ab\}$ ,  $P_2(\{a, b, c\}) = \{ab, bc, ca\}$ .

Plus généralement, si  $|X| = n \geq 1$ , alors  $|P_2(X)| = \frac{n(n-1)}{2}$ .

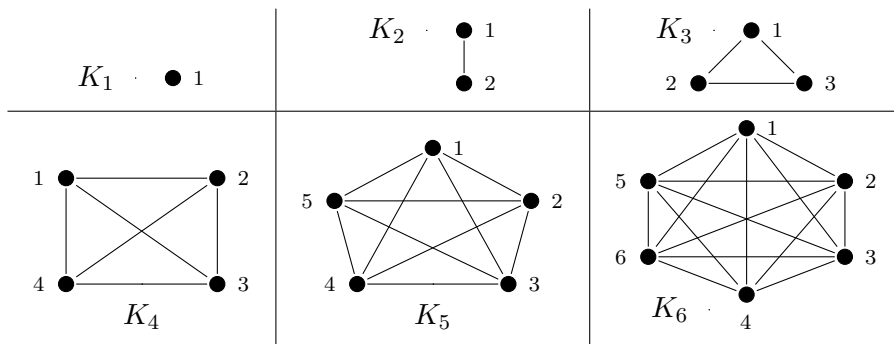
(Pour la démonstration de cette formule, on s'inspirera de l'application précédente.)

### Définition 1.3

Un graphe  $G = (X, E)$  est dit **complet** si et seulement si  $E = P_2(X)$  ; autrement dit chaque sommet est voisin de tous les autres.

Si on note  $n$  l'ordre d'un tel graphe, alors sa taille est  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Si  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  (avec  $n \geq 1$ ), on note  $K_n$  un tel graphe.



**Définition 1.4**

Soit  $G = (X, E)$  un graphe. Le graphe complémentaire de  $G$ , noté  $\overline{G}$ , est défini par  $\overline{G} = (X, P_2(X) - E)$ .

Autrement dit, les arêtes de  $\overline{G}$  sont exactement celles qui ne sont pas dans  $G$ .

**Exemple 1.2**

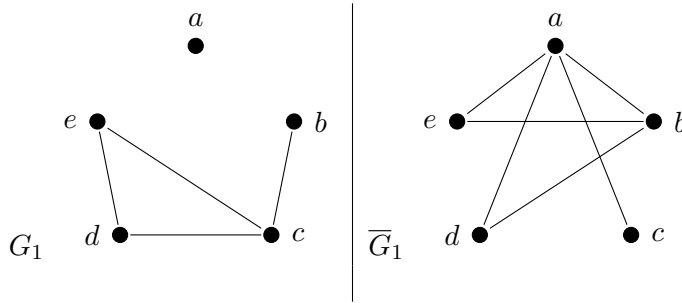
En repartant du graphe de l'exemple 1.1,

$$G_1 = (X = \{a, b, c, d, e\}, E = \{bc, cd, de, ec\}),$$

on obtient le graphe complémentaire suivant :

$$\overline{G}_1 = (X = \{a, b, c, d, e\}, \overline{E} = \{ab, ac, ad, ae, bd, be\}).$$

Dans cet exemple, on a  $P_2(X) = \{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$ , soit  $\frac{|G| \times (|G| - 1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$  arêtes.



Le graphe  $G_1 \cup \overline{G}_1$  est complet de taille 10.

En effet, par définition de l'union de deux graphes,  $G_1 \cup \overline{G}_1 = (X, E \cup \overline{E})$  et  $E \cup \overline{E} = P_2(X)$ .

**Définition 1.5**

La **séquence des degrés** d'un graphe  $G$ , notée  $S(G)$ , est la liste ordonnée par ordre croissant des degrés des sommets de  $G$ .

**Exemple 1.3**

La séquence du graphe de l'exemple 1.1 est  $S(G_1) = (0, 1, 2, 2, 3)$ .

**Attention.** À chaque graphe correspond une séquence unique mais la réciproque est évidemment fautive. À une séquence peut correspondre une infinité de graphes (ne serait-ce qu'en changeant le nom des sommets) ou aucun. La proposition qui suit, n'est pas une propriété de base. Cependant, nous avons jugé utile de la présenter ici car elle permet de savoir si une séquence correspond ou non à un graphe existant.

**Proposition 1.2 (Havel 1955 ; Hakimi 1962)**

Soient  $n$  un entier tel que  $n > 1$  et  $S$  une séquence donnée de  $n$  entiers naturels rangés par ordre croissant  $S = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  avec  $d_n \leq n - 1$ .

Il existe des graphes ayant pour séquence  $S$  si et seulement s'il existe un graphe  $G$  ayant pour séquence  $S$  et dont le sommet de degré  $d_n$  est voisin des  $d_n$  sommets qui le précèdent directement dans la séquence de  $S$ .

Plus précisément, si on note  $x_i$  le sommet de degré  $d_i$ , alors dans ce graphe  $G$ , le sommet  $x_n$  de degré  $d_n$  sera voisin des sommets  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-d_n}$ .

**Preuve.** Si le graphe  $G$  tel qu'il est décrit dans la proposition, existe, alors il est clair que la séquence  $S$  est celle d'un graphe existant.

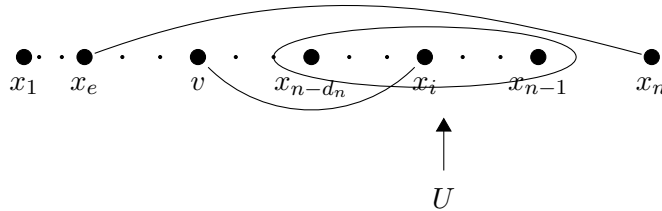
Réciproquement, nous allons montrer qu'à partir d'un graphe quelconque  $G'$  ayant pour séquence  $S$ , nous pouvons construire le graphe  $G$  en question.

Considérons un graphe  $G'$  de séquence  $S$  et dont l'ensemble des sommets est  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  avec pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\deg(x_i) = d_i$ .

Notons  $U = \{x_{n-d_n}, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}\}$ , l'ensemble des  $d_n$  sommets situés juste avant  $x_n$  dans la séquence  $S$  (on supposera que  $d_n \geq 1$  pour ne pas raisonner sur un ensemble vide).

Supposons qu'il existe un sommet  $x_i$  ( $i$  comme « intérieur ») de l'ensemble  $U$  qui ne soit pas voisin de  $x_n$  (si un tel sommet n'existe pas, il n'y a rien à faire :  $G'$  est le graphe recherché). Il existe donc un sommet extérieur à  $U$ , noté  $x_e$ , voisin de  $x_n$  (puisque  $\deg(x_n) = d_n = |U|$ ).

Ceci est illustré dans le schéma ci-dessous.



On a par construction  $\deg_{G'}(x_i) \geq \deg_{G'}(x_e)$  (car  $d_i \geq d_e$ ) et donc **le sommet  $x_i$  a au moins autant de voisins que  $x_e$**  ( $x_e$  a un voisin  $x_n$  qui n'est pas voisin de  $x_i$ ).

Il existe donc au moins un sommet  $v$  distinct de  $x_e$  qui est voisin de  $x_i$  et qui n'est pas voisin de  $x_e$ .

En remplaçant dans  $G'$  les arêtes  $x_n x_e$  et  $x_i v$  par  $x_n x_i$  et  $x_e v$ , on obtient un graphe de **même séquence** dans lequel  $x_n$  a un voisin en plus dans  $U$ .

