CHAPITRE PREMIER

LE FLUIDE PARFAIT

§ 1. Equation de continuité

La *mécanique des fluides* a pour objet l'étude du mouvement des fluides (i.e. des liquides et des gaz). Comme les phénomènes à l'étude sont des phénomènes macroscopiques, on considère que les fluides sont des milieux continus. Cela signifie que tout élément de volume d'un fluide, même petit, renferme un très grand nombre de molécules. En conséquence, chaque fois qu'il sera question d'éléments de volume infinitésimaux, il sera sous-entendu qu'il s'agit de volumes « physiquement » petits par rapport au volume du corps, mais grands par rapport aux distances entre les molécules. La même signification doit être donnée aux expressions telles que « particule de fluide » ou « point de fluide ». Lorsqu'on parlera du déplacement d'une particule de fluide, il sera question non pas du déplacement d'une molécule, mais du déplacement de tout un élément de volume contenant un grand nombre de molécules et cependant considéré comme un point en mécanique des fluides.

Pour décrire en termes de mathématiques l'état d'un fluide en mouvement, on utilise des fonctions décrivant la distribution des vitesses du fluide $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ ainsi que celle de deux de ses caractéristiques thermodynamiques telles que la pression $p(x, y, z, t)$ et la densité $\rho(x, y, z, t)$. On sait que les valeurs de toutes les grandeurs thermodynamiques sont déduites des valeurs de deux de ces grandeurs à l'aide de l'équation d'état de la substance considérée. Ainsi, connaissant cinq grandeurs: les trois composantes de la vitesse $\mathbf{v}$, la pression p et la densité ρ, on caractérise pleinement l'état d'un fluide en mouvement.

En général, toutes ces grandeurs sont des fonctions des coordonnées x, y, z et du temps t. Précisons que la vitesse $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ est la vitesse du fluide en un point x, y, z de l'espace à l'instant t et se rapporte à des points déterminés de l'espace et non pas à des particules déterminées du fluide se déplaçant dans l'espace au cours du temps; la même chose vaut pour les grandeurs ρ et p.

Pour pouvoir établir les équations fondamentales de la mécanique des fluides, nous commencerons par établir l'équation exprimant la loi de la conservation de la matière.

Considérons un certain volume V_0 de l'espace. La quantité (la masse) de fluide contenu dans ce volume est égale à $\int \rho dV$, ρ étant la densité du fluide et l'intégration étant étendue au volume V_0. A travers l'élément $d\mathbf{f}$ de la surface délimitant le volume considéré, il s'écoule, par unité de temps, une quantité de fluide égale à $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$; la valeur absolue du vecteur $d\mathbf{f}$ est égale à l'aire de l'élément de surface et le vecteur est orienté suivant la normale à cet élément de surface. En convenant d'orienter $d\mathbf{f}$ suivant la normale extérieure, la quantité $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ sera positive si le fluide sort du volume considéré, et négative si le fluide y pénètre. La quantité totale de fluide sortant du volume V_0 par unité de temps est donc égale à

$$\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f},$$

l'intégration étant étendue à toute la surface fermée embrassant le volume considéré.

D'autre part, la diminution de la quantité de fluide contenu dans le volume V_0 peut être présentée sous la forme

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV.$$

En identifiant les deux expressions ci-dessus on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV = -\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \tag{1,1}$$

Transformons l'intégrale de surface en une intégrale de volume:

$$\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \rho\mathbf{v}\, dV.$$

On obtient ainsi

$$\int \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} \right) dV = 0.$$

Puisque cette égalité doit être vérifiée quel que soit le volume considéré, l'expression placée sous le signe d'intégration doit être égale à zéro, i.e.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0. \tag{1,2}$$

C'est l'*équation* dite *de continuité*.

En développant l'expression div $\rho\mathbf{v}$ on peut écrire (1,2) sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0. \tag{1,3}$$

Le vecteur

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1,4}$$

est appelé *densité du flux de fluide*. Sa direction et son sens coïncident avec ceux de l'écoulement du fluide, tandis que sa valeur absolue détermine la quantité de fluide s'écoulant par unité de temps à travers une unité d'aire de la surface orthogonale à la vitesse.

§ 2. Equation d'Euler

Délimitons un certain volume au sein du fluide. La force totale s'exerçant sur ce volume de fluide est donnée par l'intégrale

$$-\oint p\,d\mathbf{f}$$

prise sur la surface délimitant le volume. En transformant cette intégrale de surface en une intégrale de volume, nous obtenons:

$$-\oint p\,d\mathbf{f} = -\int \operatorname{grad} p\,dV.$$

Cette égalité montre que chaque élément de volume dV du fluide est soumis à la force $-\,dV \operatorname{grad} p$ exercée par le fluide environnant. On peut donc dire qu'une unité de volume du fluide est soumise à l'action d'une force égale à $-\operatorname{grad} p$.

Nous pouvons écrire maintenant l'équation de mouvement de l'élément de volume du fluide en égalant la force $-\operatorname{grad} p$ au produit de la masse ρ d'une unité de volume du fluide par son accélération $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p. \qquad (2,1)$$

La dérivée $d\mathbf{v}/dt$ caractérise ici non pas la variation de la vitesse du fluide en un point fixe de l'espace, mais la variation de la vitesse d'une particule déterminée du fluide se déplaçant dans l'espace. On doit exprimer cette dérivée en fonction de quantités relatives à des points occupant des positions fixes dans l'espace. Remarquons d'abord que la variation de la vitesse $d\mathbf{v}$ d'une particule de fluide donnée au cours d'un intervalle de temps dt se compose de deux parties: la variation de la vitesse au point considéré de l'espace au cours du temps dt et la différence des vitesses (au même instant) en deux points séparés par une distance $d\mathbf{r}$ parcourue par la particule de fluide en un temps dt. La première partie est égale à

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\,dt,$$

où la dérivée $\partial\mathbf{v}/\partial t$ est évaluée en un point donné de l'espace, i.e. pour x, y, z constants. L'autre partie de la variation de la vitesse est égale à

$$dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r}\nabla)\,\mathbf{v}.$$

On obtient ainsi

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\, dt + (d\mathbf{r}\nabla)\, \mathbf{v}.$$

En divisant par dt les deux membres de cette égalité, on obtient [1])

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, \mathbf{v}. \tag{2,2}$$

En portant ce résultat dans (2,1) il vient:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\, \operatorname{grad} p. \tag{2,3}$$

C'est l'équation de mouvement du fluide que nous voulions obtenir et qui a été établie par *L. Euler* en 1755. *L'équation d'Euler* est l'une des équations fondamentales de la mécanique des fluides.

Lorsque le fluide est placé dans le champ de pesanteur, chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force $\rho\mathbf{g}$, $\mathbf{g}$ étant l'accélération déterminée par la force de pesanteur. Cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (2,1), de sorte que (2,3) doit s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \tag{2,4}$$

Dans ce qui précède nous n'avons tenu aucun compte des processus de dissipation de l'énergie pouvant se manifester lors de l'écoulement d'un fluide par suite du frottement interne (de la viscosité du fluide) et de l'échange de chaleur entre ses différentes parties. Par conséquent, l'exposé qui précède ainsi que tous les développements ultérieurs présentés dans ce chapitre ne concernent que les mouvements des fluides lors desquels la conductibilité thermique et la viscosité peuvent être négligées. On dit alors qu'il s'agit du mouvement d'un *fluide parfait.*

L'absence de tout échange de chaleur entre les différentes parties d'un fluide (ainsi qu'entre celui-ci et les corps environnants) signifie que le mouvement évolue de façon adiabatique dans chaque partie du fluide. On peut donc poser que le mouvement du fluide parfait est adiabatique.

Au cours du mouvement adiabatique l'entropie de chaque partie du fluide reste constante lorsque ces parties se déplacent dans l'espace. En désignant par s l'entropie rapportée à l'unité de masse du fluide, on peut exprimer l'adiabaticité du mouvement par l'équation

$$\frac{ds}{dt} = 0, \tag{2, 5}$$

---

[1]) La dérivée d/dt ainsi définie est appelée *dérivée substantielle* afin de marquer qu'elle est liée au déplacement de la substance fluide.

où la dérivée totale par rapport au temps désigne, comme dans (2,1), la variation d'entropie d'une partie donnée du fluide subissant un déplacement. On peut écrire cette dérivée sous la forme suivante:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} s = 0. \qquad (2,6)$$

C'est la forme générale de l'équation exprimant l'adiabaticité du mouvement d'un fluide parfait. A l'aide de (1,2) cette équation peut être mise sous la forme de l'« équation de continuité » pour l'entropie

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho s \mathbf{v}) = 0. \qquad (2,7)$$

Le produit $\rho s \mathbf{v}$ représente la *densité du flux d'entropie.*

Généralement l'équation d'adiabaticité revêt une forme beaucoup plus simple. Si à l'instant initial l'entropie a la même valeur en tous les points du fluide, elle conservera partout cette même valeur lors du mouvement ultérieur du fluide. Dans ce cas on peut donc écrire l'équation d'adiabaticité sous la forme simple

$$s = \text{const} \qquad (2,8)$$

que nous utiliserons généralement dans ce qui suit. Ce type de mouvement est appelé mouvement *isentropique.*

Si le mouvement du fluide est isentropique, on peut mettre l'équation de mouvement (2,3) sous une autre forme en se fondant sur la relation bien connue de la thermodynamique

$$dw = T\,ds + V\,dp,$$

où w est l'enthalpie de l'unité de masse du fluide, $V = 1/\rho$ le volume massique et T la température. Puisque $s = \text{const}$, on a

$$dw = V\,dp = \frac{1}{\rho}\,dp,$$

si bien que

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla w.$$

On peut donc écrire l'équation (2,3) sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\operatorname{grad} w. \qquad (2,9)$$

Il est souvent utile de disposer d'une forme de l'équation d'Euler ne contenant que la vitesse. En utilisant la formule bien connue de l'analyse vectorielle

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v},$$

on peut écrire (2,9) sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad}\left(w + \frac{v^2}{2}\right). \qquad (2,10)$$

En appliquant aux deux membres de cette équation l'opération rot, on obtient l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}), \qquad (2,11)$$

qui ne contient plus que la vitesse.

Aux équations de mouvement on doit imposer des conditions aux limites qui doivent être satisfaites sur les parois du récipient contenant le fluide. Pour un fluide parfait cette condition doit exprimer tout simplement que le fluide ne peut passer au travers d'une surface solide. Cela signifie que sur des parois immobiles la composante de la vitesse du fluide qui est normale à la paroi doit être égale à zéro:

$$v_n = 0 \qquad (2,12)$$

(dans le cas général où la surface solide est mobile, v_n doit être égal à la composante correspondante de la vitesse de déplacement de cette surface).

A la surface de séparation de deux fluides immiscibles doivent être vérifiées les conditions de l'égalité des pressions et de l'égalité des composantes normales de la vitesse des deux fluides (chacune de ces vitesses est égale à la vitesse du déplacement normal de la surface de séparation).

Nous avons déjà signalé au début du § 1 que l'état d'un fluide en mouvement est déterminé par les trois composantes de la vitesse $\mathbf{v}$ et deux grandeurs telles que la pression p et la densité ρ. Il s'ensuit que le système complet des équations de mouvement des fluides doit comporter cinq équations. Pour un fluide parfait, ces cinq équations sont les équations d'Euler, l'équation de continuité et l'équation exprimant l'adiabaticité du mouvement.

Problème

Ecrire les équations de l'écoulement unidimensionnel d'un fluide parfait en variables a, t, où a est la coordonnée x des particules de fluide à un certain instant $t = t_0$ (variable dite de Lagrange) [1].

---

[1]) Quoique ces variables soient dites de Lagrange, en fait les équations du mouvement des fluides utilisant ces coordonnées ont été établies par *L. Euler* en même temps que les équations fondamentales (2,3).

S o l u t i o n. Avec ces variables la coordonnée x de chaque particule de fluide à un instant quelconque est considérée comme une fonction de t et de sa coordonnée a à l'instant initial: $x = x(a, t)$. La condition de conservation de la masse de l'élément de volume du fluide en mouvement (équation de continuité) s'écrit alors sous la forme $\rho\, dx = \rho_0\, da$, ou encore

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0,$$

où $\rho_0(a)$ est la distribution initiale donnée de la densité. Par définition la vitesse d'une particule de fluide est $v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$, tandis que la dérivée $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a$ caractérise la variation au cours du temps de la vitesse de la particule pendant son mouvement. L'équation d'Euler s'écrira sous la forme

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

et l'équation d'adiabaticité sous la forme

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a = 0.$$

§ 3. Hydrostatique

Pour un fluide au repos situé dans un champ de pesanteur uniforme l'équation d'Euler (2,4) s'écrit sous la forme

$$\operatorname{grad} p = \rho \mathbf{g}. \tag{3,1}$$

Cette équation décrit l'équilibre mécanique du fluide. (En l'absence de toute force extérieure l'équation d'équilibre se réduit à $\nabla p = 0$, i.e. $p = \text{const}$, autrement dit la pression est la même en tous les points du fluide.)

En posant que la densité est constante dans tout le volume du fluide, ce qui implique que le fluide ne subit aucune compression sous l'action d'un champ extérieur, l'équation (3,1) se laisse intégrer. En orientant l'axe des z suivant la verticale ascendante, on a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

d'où

$$p = -\rho g z + \text{const}.$$

Si le fluide au repos possède une surface libre (située à une hauteur h) soumise en tous ses points à une même pression extérieure p_0, cette surface doit être un plan horizontal $z = h$. Etant donné que $p = p_0$ pour $z = h$, nous avons

$$\text{const} = p_0 + \rho g h,$$

de sorte que

$$p = p_0 + \rho g (h - z). \tag{3,2}$$

Lorsque la masse du fluide est importante, la densité ρ ne peut être constante; cette assertion concerne en premier lieu les gaz (l'air par exemple). Supposons que le fluide se trouve à l'état d'équilibre mécanique et thermique. Dans ce cas la température est la même en tous les points du fluide et l'équation (3,1) peut être intégrée de la façon suivante. Utilisons la relation thermodynamique bien connue

$$d\Phi = -s\,dT - V\,dp,$$

où Φ est le potentiel thermodynamique rapporté à l'unité de masse du fluide. A température constante

$$d\Phi = V\,dp = \frac{1}{\rho}\,dp.$$

Ce résultat montre que dans le cas considéré l'expression $\frac{1}{\rho}\nabla p$ peut être égale à $\nabla\Phi$ et l'équation d'équilibre (3,1) s'écrira

$$\nabla\Phi = \mathbf{g}.$$

Si le vecteur $\mathbf{g}$, orienté suivant le sens négatif de l'axe des z, est constant, on a l'identité

$$\mathbf{g} = -\nabla\,(gz).$$

On aura donc

$$\nabla\,(\Phi + gz) = 0,$$

ce qui implique que dans tout le volume du fluide on doit avoir

$$\Phi + gz = \text{const}; \tag{3,3}$$

gz représente l'énergie potentielle de l'unité de masse du fluide soumis à l'action de la pesanteur. La condition (3,3) a déjà été établie en physique statistique en tant que condition de l'équilibre thermodynamique d'un système soumis à l'action d'un champ extérieur.

Notons encore un corollaire simple de l'équation (3,1). Lorsqu'un liquide ou un gaz (l'aire par exemple) se trouve dans un état d'équilibre mécanique dans le champ de pesanteur, la pression au sein de ces fluides ne peut dépendre que de la hauteur z (car si la pression avait des valeurs différentes en différents points situés à la même hauteur, le fluide se mettrait en mouvement). L'équation (3,1) implique alors que la densité

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3,4}$$

ne dépend, elle aussi, que de la hauteur z. Or la pression et la densité déterminent univoquement la température en un point donné du corps. On en conclut donc que la température ne doit dépendre