

Chapitre 1

Introduction

1.1 De l'intégrale de Riemann à l'intégrale stochastique

On commence par résumer l'histoire de la *théorie de l'intégration* et de son application aux processus stochastiques depuis la fin du XIX^e siècle jusqu'à la fin du XX^e.

1.1.1 Processus stochastique, intégrales de Lebesgue et de Riemann

Un processus stochastique est une *grandeur*, le plus souvent un nombre réel $H(t, \omega)$, dépendant du temps t et d'un *aléa* ω appartenant à un ensemble Ω où est définie une mesure de probabilité P .

On suppose en général que si B est un intervalle (ou plus généralement un borélien) dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, *l'événement* :

$$\{\omega \in \Omega \mid H(t, \omega) \in B\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des aléas ω tels que le processus H à l'instant t soit dans B est mesurable au sens où l'on peut lui affecter une mesure de probabilité P .

La connaissance de H et de P permet alors d'exprimer deux grandeurs moyennes :

1. La valeur moyenne de H à l'instant t : c'est l'espérance $E(H_t)$ de la variable aléatoire H_t , c'est-à-dire son intégrale de Lebesgue par rapport à la probabilité P (on trouvera au chapitre 2 un bref rappel de la construction de l'intégrale de Lebesgue) :

$$E(H_t) = \int_{\Omega} H_t(\omega) P(d\omega)$$

2. La valeur moyenne $M(t, \omega)$ de $H(s, \omega)$ sur l'intervalle $[0, t]$ à ω fixé est donnée par l'intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure λ de Lebesgue sur \mathbb{R}^+ :

$$M(t, \omega) = \frac{1}{t} \int_0^t H(s, \omega) ds$$

Rappelons que la mesure λ de Lebesgue sur \mathbb{R}^+ est la mesure positive qui est égale à la longueur sur les intervalles :

$$\lambda]a, b] = b - a$$

Dans les deux cas, pour que les intégrales de Lebesgue :

$$\int_{\Omega} H_t(\omega)P(d\omega) \quad \text{et} \quad \int_0^t H(s, \omega)ds$$

puissent être définies, les applications $\omega \rightarrow H_t(\omega)$ et $t \rightarrow H(t, \omega)$ doivent être *mesurables* (on trouvera au chapitre 2 les rappels nécessaires sur la mesurabilité).

Notons que dans le cas où l'application $t \rightarrow H(t, \omega)$ est *continue*, l'intégrale de Lebesgue :

$$\int_0^t H(s, \omega)ds$$

se réduit à une *intégrale de Riemann* et on peut *approximer* la valeur de l'intégrale par une *somme de Riemann* :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(s_k, \omega)(t_{k+1} - t_k) \longrightarrow \int_0^t H(s, \omega)ds$$

avec $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$, $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$ et $\max_k(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$.

1.1.2 Intégrales de Riemann-Stieltjes, d'Ito-Stieltjes et de Lebesgue-Stieltjes

On a souvent besoin dans la modélisation de calculer une valeur moyenne de $H(s, \omega)$ sur l'intervalle $[0, t]$ relative aux accroissement d'un autre processus $X(s, \omega)$.

Par exemple si X_t est le prix d'un actif financier (matière première, action, etc.) et H_t est la quantité de l'actif X à l'instant t dans un portefeuille, alors la variation de la valeur Y du portefeuille due à X entre t et $t + dt$ sera :

$$dY(t, \omega) = H(t, \omega)dX(t, \omega)$$

et sa valeur $Y(t, \omega)$ à t sera obtenue par :

$$Y(t, \omega) = Y(0, \omega) + \int_0^t H(s, \omega)dX(s, \omega)$$

à condition de donner un sens à l'intégrale $\int_0^t H(s, \omega)dX(s, \omega)$ que l'on va définir de la même manière que l'intégrale de Riemann et qui est appelée *intégrale de Riemann-Stieltjes*.

Intégrale de Riemann-Stieltjes

Pour définir $\int_0^t H(s, \omega) dX(s, \omega)$ on étudie la convergence des *sommes de Riemann-Stieltjes* :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(s_k, \omega)(X(t_{k+1}, \omega) - X(t_k, \omega))$$

où $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$, $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$ et $\max_k(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$.

On montre [10] que si $t \rightarrow H(t, \omega)$ est continue et si $t \rightarrow X(t, \omega)$ est *càdlàg* (continue à droite avec une limite à gauche en tout $t > 0$) et à *variation finie* (c'est-à-dire est la différence de deux applications croissantes) alors les sommes de Riemann-Stieltjes convergent. C'est l'intégrale de Riemann-Stieltjes. Notons que dans une somme de Riemann-Stieltjes le point s_k d'échantillonnage de H est arbitraire dans l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

Intégrale d'Ito-Stieltjes

On peut relaxer la contrainte de continuité de $t \rightarrow H(t, \omega)$ en prenant le point s_k d'échantillonnage à *gauche*, c'est-à-dire $s_k = t_k$. On obtient une *somme d'Ito-Stieltjes* :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(t_k, \omega)(X(t_{k+1}, \omega) - X(t_k, \omega))$$

On montre alors [10] que si $t \rightarrow H(t, \omega)$ est *càdlàg* ou *càglàd* (continue à gauche avec une limite à droite en tout t) et si $t \rightarrow X(t, \omega)$ est toujours *càdlàg* et à variation finie, alors les sommes d'Ito-Stieltjes convergent. C'est l'intégrale d'Ito-Stieltjes.

La contrainte de choisir le point d'échantillonnage de H à gauche de $[t_k, t_{k+1}]$ est en général compatible avec la modélisation. Dans le cas de la gestion d'un portefeuille financier par exemple, les temps t_k correspondent à la réévaluation du portefeuille, c'est-à-dire à la modification des quantités des différents actifs qu'il contient. Ce nombre est donc constant après sa réévaluation au temps t_k jusqu'au temps t_{k+1} . La variation de valeur du portefeuille due à X entre t_k et t_{k+1} est donc :

$H(t_k)(X(t_{k+1}) - X(t_k))$ et entre $0 = t_0$ et $t = t_n$ elle est exactement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(t_k, \omega)(X(t_{k+1}, \omega) - X(t_k, \omega))$$

Intégrale de Lebesgues-Stieltjes

En gardant les contraintes sur X qui doit toujours être *càdlàg* et à variation finie, on peut relaxer complètement les contraintes sur H hormis la mesurabilité. C'est *l'intégrale de Lebesgues-Stieltjes*. La construction est un peu différente. On utilise l'application $s \rightarrow X(s, \omega)$ pour définir une mesure $\mu_{X(\omega)}$ sur \mathbb{R}^+ à partir de sa valeur sur les intervalles $]a, b]$:

$$\mu_{X(\omega)}]a, b] = X_b(\omega) - X_a(\omega)$$

et on définit l'intégrale de Lebesgues-Stieltjes relative à X comme intégrale de Lebesgue relative à μ_X :

$$\int_0^t H(s, \omega) dX(s, \omega) = \int_0^t H(s, \omega) \mu_{X(\omega)}(ds)$$

On trouvera le détail de cette construction au chapitre 2.

Notons que dans le cas où $t \rightarrow H(t, \omega)$ est continu à gauche et borné on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(t_k, \omega) (X(t_{k+1}, \omega) - X(t_k, \omega)) \longrightarrow \int_0^t H(s, \omega) dX(s, \omega)$$

avec $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$ et $\max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$.

Un petit exemple instructif, ou l'on voit que les intégrales de Lebesgue-Stieltjes et d'Ito-Stieltjes ne sont pas toujours égales.

Soit $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x(t) = 0$ sur $[0, 1[$ et $x(t) = 1$ sur $[1, +\infty[$ (échelon). L'application x est *càdlàg* et croissante, la mesure positive qu'elle définit sur la tribu borélienne est la *masse unité* au point 1 soit δ_1 .

Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application *càdlàg* ou *càglàd*, donc mesurable, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(t) dx(t) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) \delta_1(dt) = f(1) \quad (\text{intégrale de Lebesgue-Stieltjes})$$

et par ailleurs pour $0 < h < 1$:

$$f(1-h)[x(1) - x(1-h)] = f(1-h) \longrightarrow f(1_-) \quad (\text{lorsque } h \rightarrow 0)$$

Si f est *càglàd*, $f(1_-) = f(1)$ les intégrales de Lebesgue-Stieltjes et d'Ito-Stieltjes sont égales, en revanche si f est *càdlàg*, $f(1_-)$ n'est pas nécessairement égale à $f(1)$ et les intégrales de Lebesgue-Stieltjes et d'Ito-Stieltjes ne sont pas nécessairement égales.

1.1.3 Mouvement brownien et intégrale stochastique d'Ito

Pour tout processus mesurable H et tout processus X *càdlàg* et à variation finie, l'intégration au sens de Lebesgue-Stieltjes permet de donner un sens à l'intégrale :

$$\int_0^t H(s, \omega) dX(s, \omega)$$

Supposer X *càdlàg* est peu contraignant car on peut très souvent régulariser un processus (c'est-à-dire le remplacer par un processus *càdlàg* qui lui est égal presque partout). En revanche l'hypothèse de variation finie est apparu très contraignante dès le début du XX^e siècle avec l'étude des propriétés du mouvement brownien.

Rappelons qu'un processus B à valeur dans \mathbb{R} est un *mouvement brownien* si :

1. $B_0 = 0$,
2. $\forall \omega$, l'application $t \rightarrow B_t(\omega)$ est continue sur \mathbb{R}^+ ,
3. les accroissements $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants,
4. $\forall t, h$, $B_{t+h} - B_t$ est de loi normale de moyenne nulle et de variance h .

On montre qu'un tel processus (qui est une *martingale continue*) ne peut *pas* être à variation finie (sauf à être constant, voir le chapitre 3). Or le mouvement brownien est très utilisé dans la modélisation ; on doit donc donner un sens à des intégrales de la forme :

$$\int_0^t H_s dB_s$$

C'est l'*intégrale stochastique d'Ito*. Elle conduit à des formules différentes de celle du calcul différentiel classique, ainsi dans l'égalité :

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{t}{2}$$

le terme $-\frac{t}{2}$ n'existerait pas si l'application $t \rightarrow B_t$ était différentiable. C'est ce qui fait l'originalité du *calcul stochastique*.

1.1.4 Forme générale de l'intégrale stochastique

Pendant la seconde moitié du XX^e siècle de nombreux travaux ont été publiés, inspirés de ceux d'Ito, pour généraliser son intégrale et démontrer les formules du calcul stochastique. Citons en particulier ceux de l'Ecole française de probabilité de l'Université de Strasbourg menés par P.A. Meyer. Ils aboutissent à définir l'*intégrale stochastique* :

$$H.X_t = \int_0^t H_s dX_s$$

pour les classes les plus générales de processus H à intégrer et de processus X intégrateurs. En s'inspirant des travaux de P.A. Meyer on définira au chapitre 10 l'intégrale stochastique $H.X$ pour :

1. un processus H *prévisible* localement borné,
2. une semi-martingale X .

1.2 Contexte de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique :

$$H.X_t = \int_0^t H_s dX_s$$

est définie de manière générale pour un processus H *prévisible* localement borné et une semi-martingale X . Pour définir ces concepts il faut au préalable préciser le contexte en introduisant les notions de filtration et de temps d'arrêt.

1.2.1 Tribu et filtration sur l'ensemble Ω des *aléas*

Dans un ensemble Ω d'*aléas* on appelle *événement* un sous-ensemble de Ω . On se donne dans Ω (ou on construit) :

1. une famille d'événements \mathcal{F} contenant l'ensemble vide, stable par union et intersection dénombrable et par complémentaire. Une telle famille d'événements est appelée *tribu*.
2. une famille (\mathcal{F}_t) croissante dans le temps au sens de l'inclusion de sous-tribus de \mathcal{F} . Chaque sous-tribu \mathcal{F}_t regroupe les événements (ensemble d'aléas) ne dépendant que des instants $s \leq t$ et est appelée *tribu du passé ou tribu des événements antérieurs à t* . On appelle *filtration* la famille (\mathcal{F}_t) .

Par exemple, si on étudie le mouvement d'une particule dans l'espace \mathbb{R}^3 , un *aléa* (appelé aussi *réalisation*) $\omega \in \Omega$ sera une *trajectoire* de la particule, c'est-à-dire une application continue de l'espace des temps \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^3 . L'espace Ω de toutes les réalisations est donc l'espace des applications continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^3 .

En notant $X_s(\omega), Y_s(\omega), Z_s(\omega)$ les coordonnées de la particule sur la trajectoire ω à l'instant s , on peut définir des événements (ensemble de réalisations) concernant le mouvement. Par exemple, l'événement :

$$\{\omega \in \Omega \mid X_s(\omega) \in A, Y_s(\omega) \in B, Z_s(\omega) \in C\} \quad (*)$$

où A, B, C sont des segments de \mathbb{R} , est celui qui regroupe toute les trajectoires passant à l'instant s dans le *pavé* $A \times B \times C$ de \mathbb{R}^3 .

L'ensemble des parties de Ω qui contient tous les ensembles de la forme (*) et qui est stable par union et intersection dénombrable et par complémentaire forme une tribu \mathcal{F} sur Ω qui regroupe suffisamment d'événements pour décrire le mouvement, et pas trop, pour que l'on puisse définir une probabilité P d'occurrence de ces événements.

De plus si on considère pour tout instant t uniquement les événements de la forme (*) où $s \leq t$ et que l'on construit comme précédemment la tribu \mathcal{F}_t qui les contient, on obtient une suite croissante (\mathcal{F}_t) de sous-tribus de \mathcal{F} appelée *filtration* telle qu'à chaque instant t la tribu \mathcal{F}_t regroupe tous les événements ne dépendant que du passé.

1.2.2 Temps d'arrêt sur l'ensemble Ω des *aléas*

Un *temps d'arrêt* T est une application de l'ensemble Ω de *aléas* dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ telle que l'on puisse décider à tout instant t , s'il est atteint ou non, uniquement au vu des événements de la tribu \mathcal{F}_t , ce qui formellement peut s'écrire :

$$\forall t, \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Par exemple le premier instant T_B où un processus X entre dans un ensemble B est défini (avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$) par :

$$T_B(\omega) = \inf\{t \mid X_t(\omega) \in B\}$$

et est en général (voir le *théorème des débuts* au chapitre 6) un temps d'arrêt.

En revanche la variable S définie par :

$$S(\omega) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} X_t(\omega)$$

qui donne la valeur « maximale » du processus X sur une trajectoire ω n'est *pas* un temps d'arrêt car sa définition suppose connue *toute* la trajectoire ω .

Les temps d'arrêt seront étudiés en détail au chapitre 6.

1.2.3 Processus prévisible localement borné

Une application X d'un ensemble Ω muni d'une tribu \mathcal{F} dans \mathbb{R} est mesurable relativement à \mathcal{F} si pour tout intervalle B de \mathbb{R} :

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Processus prévisibles

La tribu des *événements prévisibles* relativement à une filtration (\mathcal{F}_t) est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ qui contient les événements de la forme $[0] \times A$, où $A \in \mathcal{F}_0$, et les événements de la forme $]r, s] \times A$, où $A \in \mathcal{F}_r$ (voir le chapitre 6).

Un processus $H : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est *prévisible* s'il est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{P} des événements prévisibles définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ relativement à une filtration (\mathcal{F}_t) .

Par exemple les processus X *adaptés* (c'est-à-dire tels que pour tout t la variable X_t soit mesurable par rapport à la tribu \mathcal{F}_t) et *continus à gauche* (au sens où pour tout ω l'application $t \rightarrow X(t, \omega)$ est continue à gauche en tout $t > 0$) sont prévisibles.

Processus bornés et processus localement bornés

Un processus réel X est *borné* s'il existe une constante réelle C telle que $|X| \leq C$, c'est-à-dire :

$$\forall t, \forall \omega, |X(t, \omega)| \leq C$$

Si X est un processus réel et T un temps d'arrêt, le *processus arrêté* X^T est défini par :

$$X^T(t, \omega) = X(T(\omega) \wedge t, \omega) \quad \text{où} \quad T(\omega) \wedge t = \min(T(\omega), t)$$

Un processus réel X est *localement borné* s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissante vers $+\infty$ telle que pour tout n le processus arrêté X^{T_n} soit borné, ce qui signifie donc qu'il existe une suite réelle (C_n) telle que :

$$\forall n, |X^{T_n}| \leq C_n$$

On montre par exemple qu'un processus adapté *càglàd* (continu à gauche et ayant une limite à droite en tout t) *borné à l'origine* est localement borné (voir chapitre 10).

Finalement tout processus adapté, *càglàd* et borné à l'origine, est prévisible et localement borné. C'est l'exemple type de processus H à intégrer.

1.2.4 Définition : martingale et martingale locale

Un processus réel, adapté (c'est-à-dire tel que pour tout t la variable X_t soit mesurable par rapport à la tribu \mathcal{F}_t) et intégrable M est une *martingale* si :

$$\forall s < t, E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$$

Ce qui signifie que pour tout $s < t$ la valeur moyenne de M_t conditionnée par la tribu \mathcal{F}_s des événements antérieurs à s est égale à sa valeur M_s à l'instant s . Si M_t est le prix (actualisé) d'un actif à l'instant t , le fait que M soit une martingale signifie l'absence d'opportunité d'arbitrage sur M .

Un processus réel M est une *martingale locale* s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissante vers $+\infty$ telle que pour tout n le processus arrêté M^{T_n} soit une martingale nulle en zéro.

1.2.5 Définition : semi-martingale

Une semi-martingale est un processus réel, adapté et *càdlàg* qui se décompose en une somme d'une martingale locale et d'un processus réel, adapté, *càdlàg* et à variation finie.

Plus formellement, une semi-martingale est un processus de la forme :

$$X = Y + Z \quad \text{où :}$$

- Y est une martingale locale,
- Z est un processus réel, adapté, *càdlàg* et à variation finie.

L'application du *théorème de décomposition des martingales locales* permet alors d'écrire toute semi-martingale X sous la forme :

$$X = X_0 + M + A \quad \text{où :}$$

- X_0 est le processus constant égal à la valeur à l'origine de X ,
- M est une martingale locale **localement bornée**,
- A est un processus réel, adapté, *càdlàg*, nul en zéro et à variation finie.

1.2.6 Décomposition de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique :

$$H.X_t = \int_0^t H_s dX_s$$

où H est un processus *prévisible* localement borné, et $X = X_0 + M + A$ une semi-martingale, peut s'écrire comme la somme de trois termes :

$$H.X_t = H.X_0 + H.M_t + H.A_t = H_0 X_0 + \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s \quad \text{où :}$$