Calcul numérique approché 1

1.1 Erreurs absolue et relative

Afin de définir les notions d'erreurs absolue et relative, nous avons besoin d'introduire les notions de quantités ou de valeurs exactes et de quantités approximatives ou valeurs approchées ; ce que nous illustrons ci-après au moyen d'exemples.

— Exemples de quantités ou de valeurs exactes :

$$1, \ \frac{1}{3}, \ 5, \sqrt[3]{3}, \ \pi, \ \ln 2, \ \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right), \ e, \ \ldots$$

— Exemples de quantités approximatives ou de valeurs approchées (ci-après, en souligné) :

$$\sqrt[3]{3} \simeq \underline{1,4422}, \ \pi \simeq \underline{3.14}, \ \ln 2 \simeq \underline{0.69315}, \ e \simeq \underline{2.718}, \ \ldots$$

Soient x un nombre réel et x^* une valeur approchée de x :

— Si $x^* > x$, x^* est dite valeur approchée par excès.

— Si $x^* < x$, x^* est dite valeur approchée par défaut.

1.1.1 Erreur absolue

Définition 1.1 *On appelle erreur absolue de x^* sur x, la quantité :* $E = \mid x - x^* \mid$.

Remarque 1.1

— *Plus l'erreur absolue de x^* est petite, plus x^* est précise.*

— *L'erreur absolue sert à déterminer la précision de la valeur approchée x^* relativement à la valeur exacte x.*

1.1.2 Erreur relative

Définition 1.2 *On appelle erreur relative à x^* la quantité :* $E_r = \dfrac{\mid x - x^* \mid}{\mid x \mid} = \dfrac{E}{\mid x \mid}$.

Remarque 1.2
- *L'erreur relative est souvent exprimée en pourcentage.*
- *Elle est généralement utilisée pour comparer la précision de différentes valeurs approchées x^*, y^*, z^*, ... relativement à différentes valeurs exactes respectives x, y, z, ...*

1.2 Incertitudes absolue et relative

Dans le cas où, en plus d'une valeur approchée qui lui est associée, une valeur exacte est connue, il est possible de déterminer ses erreurs absolue et relative. Mais souvent elle ne l'est pas. Dans ce dernier cas, les erreurs absolue et relative deviennent impossible à calculer. Afin de les apprécier on introduit alors les notions d'incertitude absolue et d'incertitude relative.

Définition 1.3 *On appelle incertitude absolue d'une valeur approchée x^*, tout nombre réel positif, noté Δx, vérifiant :* $E = \mid x - x^* \mid \leq \Delta x$ *ou de manière équivalente :* $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$.

Remarque 1.3
- *Une incertitude absolue est un majorant de l'erreur absolue.*
- *Plus Δx est petite, plus la valeur approchée x^* est précise. D'où, en pratique, on prend le plus petit Δx possible.*
- *On écrit :* $x = x^* \pm \Delta x$ *ou encore* $x \simeq x^*(\pm\Delta x)$, *qui exprime le fait que :* $x \in [x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$.
- *Si x_1 et x_2 sont tels que :* $x_1 \leq x \leq x_2$ *alors* $x^* = (x_1 + x_2)/2$ *est une valeur approchée de x avec comme incertitude absolue :* $\Delta x = (x_2 - x_1)/2$.
- *Souvent au lieu d'écrire :* $x = x^* \pm \Delta x$ *ou* $x \simeq x^*(\pm\Delta x)$, *on écrit :* $x = x^* \pm \delta x \cdot 100\%$ *ou encore* $x \simeq x^*(\pm\delta x \cdot 100\%)$ *où la quantité δx est définie par :*

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}.$$

  Cette quantité est appelée incertitude relative à x^*.
- *Si l'incertitude relative δx est connue, on en déduit un encadrement du nombre exact x comme ceci :* $x^*(1 - \delta x) \leq x \leq x^*(1 + \delta x)$ *ou encore* $x = x^*(1 \pm \delta x)$, *car* $x = x^* \pm \Delta x = x^* \pm |x^*|\delta x$.

1.3 Représentation décimale d'un nombre approché

Tout nombre réel positif x peut être représenté sous la forme d'un nombre décimal de développement limité ou illimité :

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_{m-n} 10^{m-n} + \cdots$$

où les a_i sont les chiffres du nombre réel x ($a_i = 0, 1, 2, ..., 9$), avec $a_m \neq 0$ où m est un entier naturel appelé rang supérieur du nombre réel x.

Remarque 1.4 *Dans le cas où le nombre réel x est négatif, il suffit de considérer la représentation décimale du nombre $y = -x$.*

Exemple 1.1

1. *Exemple de développement limité :*

$$\begin{aligned} 7413.2680 &= 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ &\qquad + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

2. *Autre exemple d'un développement limité ... (faire attention aux zéros !) :*

$$0.041502 = 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-6}.$$

3. *Exemple de développement illimité :*

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159265358 \cdots \\ &= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} \\ &\qquad + 5 \cdot 10^{-4} + \cdots + 5 \cdot 10^{-10} + 8 \cdot 10^{-11} + \cdots \end{aligned}$$

Dans la pratique on n'utilise, essentiellement, que des nombres approchés de développements limités :

$$x \simeq \underbrace{b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_{m-n} 10^{m-n}}_{x^*}, \text{ avec } \quad b_m \neq 0.$$

— Tous les chiffres conservés b_i, $i = m, ..., m-n$, s'appellent chiffres significatifs du nombre approché x^*.
— Certains des b_i peuvent être nuls.

Les exemples suivants illustrent les cas où le zéro n'est pas considéré comme chiffre significatif.

— $x^* = 2 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6}$ qui s'écrit en notation décimale $x^* = \underline{0.00}2010$. Les zéros soulignés ne sont pas des chiffres significatifs.

— $x^* = 3 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4$ qui s'écrit en notation décimale $x^* = 30070\underline{000}$. Les zéros soulignés ne sont pas des chiffres significatifs.

Question : En règle générale, comment reconnaitre un chiffre significatif ?

La réponse est apportée par la définition suivante :

Définition 1.4 *On appelle chiffre significatif (c.s) d'un nombre approché, tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro ; et un zéro s'il se trouve entre deux chiffres significatifs ou s'il constitue un chiffre conservé.*

Exemple 1.2

1. *Une approximation à* <u>*6 décimales*</u> *de* 0.00502037 *est :*

   $\underline{0.00}5\underline{0}2\underline{0}$

   Ce zéro traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale 10^{-6} *: c'est un chiffre significatif.*

   Etant placé entre les chiffres significatifs 5 *et* 2*, zéro est lui même un chiffre significatif.*

   Ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les rangs des autres chiffres.

2. *Si on approche le nombre* 1789 *à la* <u>*centaine*</u> *près par* 1800*, à la place des chiffres négligés* 8 *et* 9*, on introduit des zéros. Ils ne servent qu'à fixer l'ordre de grandeur du nombre pris comme valeur approchée ; ce ne sont pas des chiffres significatifs. Par contre si on approche le nombre* 1789.7 *à l'*<u>*unité*</u> *près par le nombre* 1790*, le zéro est alors un chiffre significatif.*

1.4 Chiffres significatifs exacts d'un nombre approché

Soient x un nombre réel et x^* une valeur approchée de x.

Définition 1.5 *Un chiffre significatif de* x^* *est dit exact (c.s.e) si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas une demi-unité de rang du chiffre significatif, c'est-à-dire que :* $E = | x - x^* | \leq 0.5 \times$ *l'unité de rang de ce c.s.*

Ainsi :

— Le n-ième c.s après la virgule est exact si : $\Delta x \leq 0.5\ 10^{-n}$.

— Le n-ième c.s avant la virgule est exact si : $\Delta x \leq 0.5\ 10^{n-1}$.

Attention ! : Un c.s.e de x^* ne coïncide pas nécessairement avec le c.s correspondant dans x.

Propriété 1.1

— *Si un c.s est exact, tous les c.s à sa gauche sont exacts.*
— *Si un c.s n'est pas exact, tous ceux à sa droite ne le sont pas.*

Remarque 1.5 *Si l'erreur absolue de x^* ne dépasse pas une unité de rang du dernier c.s, on dit que x^* est une valeur approchée au sens large ou encore qu'il est une valeur approchée à chiffres significatifs exacts au sens large.*

1.5 Troncature et arrondissement d'un nombre

Pour approcher le nombre $\pi = 3.141592653589\cdots$, on peut considérer la valeur approchée 3.14 ou encore 3.14159, etc. ; selon le besoin. Dans le premier cas, le nombre π est tronqué (coupé en éliminant une partie) après 2 décimales ; dans le second cas, après 5 décimales.

Une méthode habituelle pour tronquer un nombre pour ne garder qu'un nombre fini de chiffres significatifs est l'arrondi :

Règle d'arrondissement. Pour arrondir un nombre jusqu'à n c.s, on élimine les chiffres à droite du n-ième c.s conservé si l'on se trouve après la virgule, sinon on remplace par des zéros. Dans les deux cas on procède de la manière suivante :

1. Si le $(n+1)$-ième c.s est strictement plus grand que 5, on augmente le n-ième chiffre de 1. Si, par contre, il est strictement plus petit que 5, les chiffres retenus restent inchangés.
2. Si le $(n+1)$-ième c.s est égale à 5 alors deux cas sont possibles :
   — Tous les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)$-ième c.s, sont des zéros : on applique la règle du chiffre pair, c'est-à-dire que le n-ième chiffre reste inchangé s'il est pair. On lui ajoute 1 s'il est impair.
   — Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)$-ième c.s, il existe au moins un qui soit non nul : on ajoute 1 au n-ième chiffre.

Remarque 1.6 *Si on applique la règle d'arrondissement ci-dessus, l'erreur absolue de la valeur approchée ainsi obtenue, et qu'on appelle erreur d'arrondi, ne dépasse pas une demi-unité de rang du dernier c.s. retenu, c'est-à-dire qu'on a :* $E = \mid x - x^* \mid \leq 0.5 \times$ *l'unité de rang du dernier c.s. retenu.*

Conséquence : Un nombre correctement arrondi ne possède que des c.s.e.

1.6 Relation entre erreur relative et c.s.e

Propriété 1.2 *Soient x un nombre réel, x^* une valeur approchée de x et E_r l'erreur relative à x^*.*

— *Si x^* possède n c.s.e, alors $E_r < 5\ 10^{-n}$ (sauf si le nombre est 1 suivi de $(n-1)$ zéros).*

— *Si $E_r \leq 0.5\ 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n c.s.e.*

1.7 Exercices résolus

Exercice 1.1 Vérifier que pour la valeur exacte $x = 2/3$, la valeur approchée $x_1^* = 0.666667$ est 1000 fois plus précise que la valeur approchée $x_2^* = 0.667$.

Solution. ▶ En effet, nous avons :

$$E_1 = |x - x_1^*| = \left|\frac{2}{3} - 0.666667\right| = \frac{1}{3}\ 10^{-6}$$

et

$$E_2 = |x - x_2^*| = \left|\frac{2}{3} - 0.667\right| = \frac{1}{3}\ 10^{-3}.$$

Ainsi $E_1 = 10^{-3} \cdot E_2$, c'est-à-dire que l'erreur absolue E_1 est 1000 fois plus petite que l'erreur absolue E_2, et donc x_1^* est 1000 fois plus précise que x_2^*. ◀

Exercice 1.2 Pour les valeurs exactes $x = 2/3$ et $y = 1/15$, on considère les valeurs approchées respectives $x^* = 0.67$ et $y^* = 0.07$. Comparer les précisions de x^* et y^*.

Solution. ▶ Les erreurs absolues respectives sont :

$$E_1 = |x - x^*| = \left|\frac{2}{3} - 0.67\right| = \frac{1}{3}10^{-2}$$

et

$$E_2 = |y - y^*| = \left|\frac{1}{15} - 0.07\right| = \frac{1}{3}10^{-2}.$$

Les erreurs relatives correspondantes sont :

$$E_{r_1} = \frac{E_1}{|\ x\ |} = 0.5\ 10^{-2} = 0.5\%$$

et

$$E_{r_2} = \frac{E_2}{|\ y\ |} = 5\ 10^{-2} = 5\%.$$

Ainsi, bien que les erreurs absolues soient égales, x^* est une valeur approchée 10 fois plus précise pour x que y^* ne l'est pour y. ◀

Exercice 1.3 (Propagation des incertitudes : Addition) Soient x et y deux valeurs exactes positives. Soient, respectivement, x^*, y^* deux valeurs approchées positives de x, y ; Δx, Δy des incertitudes absolues de x^*, y^* et δx, δy des incertitudes relatives à x^* et y^*. Montrer que :

1. $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$.
2. $\delta(x+y) \leq \max(\delta x, \delta y)$.

Indication : Prendre comme valeur approchée de $x+y$ la valeur $x^* + y^*$.

Solution. ▶

1. Du fait que : $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$, on déduit que : $(x^* + y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x + y \leq (x^* + y^*) + (\Delta x + \Delta y)$. Ainsi $(\Delta x + \Delta y)$ est une incertitude absolue de $x^* + y^*$, et par suite (par définition) on a : $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$.
2. Nous avons

$$\begin{aligned}
\delta(x+y) &= \frac{\Delta(x+y)}{x^*+y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^*+y^*} = \frac{\Delta x}{x^*} \cdot \frac{x^*}{x^*+y^*} + \frac{\Delta y}{y^*} \cdot \frac{y^*}{x^*+y^*} \\
&= \delta x \cdot \lambda_1 + \delta y \cdot \lambda_2 \\
&\leq \max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_1 + \max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_2 \\
&\leq \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=1} \max(\delta x, \delta y) = \max(\delta x, \delta y),
\end{aligned}$$

où $\lambda_1 = \dfrac{x^*}{x^*+y^*} > 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{y^*}{x^*+y^*} > 0$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. ◀

Exercice 1.4 (Propagation des incertitudes : Soustraction) Soient x et y deux valeurs exactes positives. Soient, respectivement, x^*, y^* deux valeurs approchées positives de x, y ; Δx, Δy des incertitudes absolues de x^*, y^* et δx, δy des incertitudes relatives à x^* et y^*. Montrer que :

1. $\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y$.
2. $\delta(x-y) \leq \dfrac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \max(\delta x, \delta y)$.

Indication : Prendre comme valeur approchée de $x-y$ la valeur $x^* - y^*$.

Solution. ▶ Par soucis de simplification, nous supposons que : $x^* > y^*$.

1. Nous avons, d'une part : $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$, et d'autre part
$$y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y \quad \Longrightarrow \quad -y^* - \Delta y \leq -y \leq -y^* + \Delta y.$$
D'où : $(x^* - y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x - y \leq (x^* - y^*) + (\Delta x + \Delta y)$. Ainsi $(\Delta x + \Delta y)$ est une incertitude absolue de $x^* - y^*$. Donc (par définition) on a : $\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$.
2. Nous avons
$$\begin{aligned}
\delta(x-y) &= \frac{\Delta(x-y)}{x^*-y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^* - y^*} \\
&= \frac{\Delta x}{x^*} \cdot \frac{x^*}{x^*+y^*} \cdot \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} + \frac{\Delta y}{y^*} \cdot \frac{y^*}{x^*+y^*} \cdot \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \\
&= (\delta x \cdot \lambda_1 + \delta y \cdot \lambda_2)\, \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \\
&\leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \Big[\max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_1 + \max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_2 \Big] \\
&\leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=1} \max(\delta x, \delta y) = \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \max(\delta x, \delta y),
\end{aligned}$$
où $\lambda_1 = \dfrac{x^*}{x^*+y^*} > 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{y^*}{x^*+y^*} > 0$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. ◀

Exercice 1.5

1. Soient $x^* = 255$ et $y^* = 250$ avec $\delta x = \delta y = 0.1\%$. Calculer $x^* - y^*$ et $\delta(x - y)$.
2. Calculer, pour $x^* = 56202$ et $y^* = 56198$ avec $\delta x = \delta y = 0.01\%$, les valeurs de $x^* - y^*$, $\delta(x - y)$ et $\Delta(x - y)$.
3. Conclusion.

Solution. ▶

1. Nous avons :
$$\Delta x = x^* \cdot \delta x = 255\ 10^{-3} = 0.255$$
et
$$\Delta y = y^* \cdot \delta y = 250\ 10^{-3} = 0.250$$
et puis : $x^* - y^* = 255 - 250 = 5$, avec une incertitude relative :
$$\delta(x-y) = \frac{\Delta(x-y)}{x^*-y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^* - y^*} = 10.1\ 10^{-2} = 10.1\%.$$