

Table des matières

Les probabilités hier et aujourd'hui	1
I Variables aléatoires	5
1 Rappels d'intégration	7
2 Espaces et mesures de probabilités	13
2.1 Espaces de probabilités	13
2.2 Théorème d'extension	14
Application : Construction de la mesure de Lebesgue m sur $[0, 1]$.	16
2.3 Lemme de Borel-Cantelli	17
2.4 Probabilité conditionnelle et indépendance	18
3 Variables aléatoires	21
3.1 Définitions et premières propriétés	21
3.2 Lois des variables aléatoires	22
3.3 Notions sur les processus à temps discret	34
II Convergences et Conditionnement	37
4 Différents types de convergences	39
4.1 Convergences	39
4.2 Liens entre les différentes convergences	39
5 Convergences spatiales	43
5.1 Loi des grands nombres	43
Convergence des séries de variables indépendantes	45
6 Convergence en loi unidimensionnelle	51
6.1 Fonctions de répartition	51
6.2 Fonctions caractéristiques	53
6.3 Etude de la convergence en loi unidimensionnelle	55
6.4 Le théorème limite central	61
7 Théorèmes limites dans \mathbb{R}^k	65
7.1 Convergence faible et suites tendues	65
7.2 Fonctions caractéristiques	68
Quelques prolongements	69

8	Espérance conditionnelle	73
8.1	Construction de l'espérance conditionnelle	73
8.2	Propriétés de l'espérance conditionnelle	74
8.3	Notion de martingale	76
9	Lois conditionnelles	79
9.1	Lois conditionnelles	79
9.2	Cas particuliers	81
III	Pour aller plus loin...	83
10	Vecteurs gaussiens	85
10.1	Distributions normales dans \mathbb{R}^k	85
10.2	Le Théorème Limite Central dans \mathbb{R}^k	90
10.3	Vecteurs gaussiens et conditionnement	90
11	Simulation	93
11.1	Quelques méthodes classiques	93
11.1.1	Variables aléatoires discrètes	93
11.1.2	Méthode de l'inversion	94
11.1.3	Méthode du rejet	94
11.2	Simulation de lois particulières	95
11.2.1	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	95
11.2.2	Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$	95
11.2.3	Variable normale réduite	96
11.3	Calculs d'espérances	97
11.3.1	Méthode de Monte-Carlo	97
11.3.2	Suites à discrédance faible	97
12	Processus de Poisson	99
12.1	Processus ponctuel	99
12.2	Le processus de Poisson	99
12.3	Quelques propriétés du processus de Poisson	101
12.4	Intégrale stochastique	104
13	Grandes déviations	109
13.1	Grandes déviations - énoncé	109
13.2	Préliminaires	109
13.3	Fin de la preuve du Théorème de Chernoff	112
13.4	Application au pile ou face équilibré	113
14	Suites stationnaires et théorème ergodique	115
14.1	Suites stationnaires de v.a. et systèmes dynamiques	115
14.2	Ergodicité	116
14.3	Théorème ergodique (maximal)	117
14.4	Le théorème ergodique	119
14.5	Le théorème ergodique entraîne la loi forte i.i.d.	120
14.6	Le compteur kilométrique	123
14.6.1	Système dynamique associé au compteur kilométrique	123

14.6.2	Quelques notions préliminaires	124
14.6.3	Convergence des moyennes pour les fonctions continues	125
14.6.4	Lien avec les groupes homothétiques compacts	126
14.7	Le critère de Weyl et l'ergodicité de la rotation irrationnelle sur le tore . .	127
15	Contrôle et filtrage linéaires	129
15.1	Filtrage linéaire	129
15.2	Contrôle linéaire	132
15.3	Application au guidage d'une fusée	135
15.4	Existence de contrôles optimaux	136
16	Solutions des exercices corrigés	141
	Bibliographie	179
	Index	181