Chapitre I
Généralités

1. PRINCIPE D'UN SYSTEME ASSERVI.

On veut remplir la cuve à fuel d'un particulier avec une quantité donnée de combustible (1000 litres par exemple) à partir d'un camion citerne. L'opérateur dispose d'une pompe électrique, d'un tuyau souple, d'une vanne (robinet) et d'un compteur-afficheur. La pompe étant en marche, il va ouvrir la vanne en grand au début ; puis, au fur et à mesure, en surveillant la quantité délivrée, il réduit le débit jusqu'à fermeture complète de la vanne quand le volume commandé par le client est atteint.

On a, dans cet exemple, tous les composants réunis d'un système asservi (S.A.) fonctionnant en boucle fermée :

- un ***système*** physique : ensemble constitué par la pompe, le tuyau, la vanne. L***'entrée*** du système est ici la position de la vanne, qui permet de contrôler la ***sortie*** du système (le volume délivré).

- un ***capteur*** : c'est l'appareil de mesure qui renseigne sur la grandeur de sortie.

- un ***comparateur*** : ici c'est l'opérateur qui compare à tout instant une ***consigne*** (la quantité commandée) à la quantité effectivement délivrée ; en fonction de l'écart constaté il agira proportionnellement sur la vanne.

Noter qu'avec l'habitude l'opérateur finit par savoir que, pour fournir 1000 litres, il peut ouvrir à moitié, aller boire un café dans sa cabine et revenir dix minutes plus tard pour refermer la vanne : la commande est alors dite en boucle ouverte (pas d'information en retour, pas d'action progressive fonction de l'écart). On comprend intuitivement qu'une telle façon de procéder a peu de chances d'être performante !

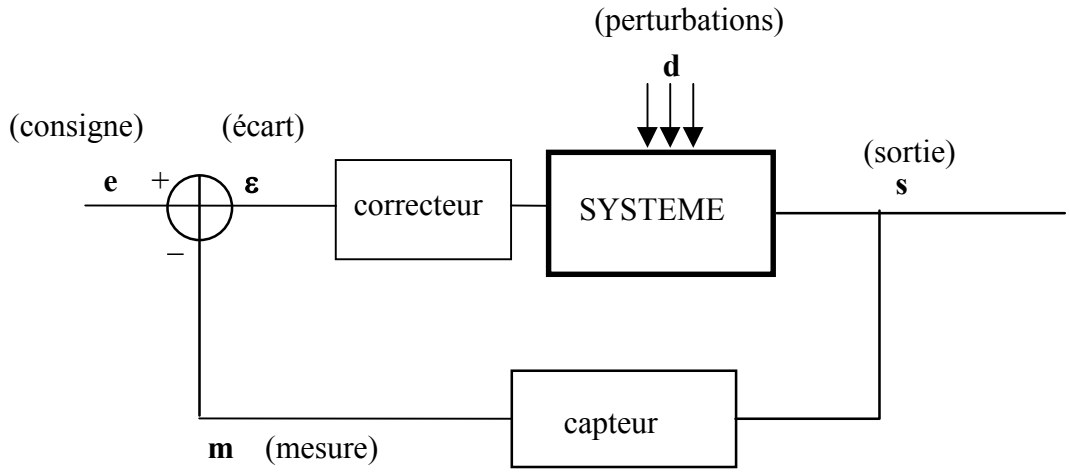
Le dispositif décrit ci-dessus ne mérite toutefois pas vraiment l'appellation de système asservi : il faut supprimer l'intervention de l'opérateur humain pour obtenir un système asservi *automatique* ou servomécanisme. Ainsi un "automate" de remplissage devra comporter en plus:

- un compteur volumétrique électronique fournissant un signal électrique (tension, courant) proportionnel au volume qui le traverse
- un circuit électronique qui "calcule" l'écart et le conditionne pour pouvoir commander progressivement la vanne
- la vanne sera motorisée (moteur à courant continu par exemple)

Le rôle de l'opérateur se limitera à afficher la consigne : il pourra boire son café en toute tranquillité !

2. STRUCTURE DE BASE D'UN SYSTEME ASSERVI.

La *figure 1* représente un système asservi ; on précise les points de **vocabulaire** suivants :



- figure 1 -

◆ e est la **consigne** ou référence

◆ s est la **sortie** du système ou grandeur réglée

◆ ε représente l'**écart** ε = e-s (relation algébrique) ; cette information est utilisée par le **correcteur** qui élabore une **commande** bien adaptée.

◆ m est la **mesure** de s réalisée par le **capteur** (ou transmetteur ou transducteur)

◆ l'ensemble des éléments disposés entre ε et s s'appelle **chaîne directe**

◆ l'ensemble des éléments disposés entre s et m s'appelle **chaîne de retour**

◆ d représente un ensemble de grandeurs susceptibles d'agir directement sur le système : ce sont les **perturbations**.

De manière un peu artificielle, à structure identique, on peut distinguer :

◆ à consigne généralement constante (ou variant peu), le dispositif évolue sous l'influence des perturbations ; le rôle de l'asservissement est de maintenir la sortie constante : on parle alors de **régulation**. Exemple: une alimentation régulée dont la tension de sortie peut varier avec le débit (courant fourni à une charge) et les fluctuations du secteur alternatif 230 Volts.

◆ si la consigne varie constamment, la sortie doit suivre le plus fidèlement et le plus rapidement possible ses variations quelles que soient les perturbations : c'est un **asservissement** ou servomécanisme. Exemple: positionnement d'un bras de robot qui doit suivre une trajectoire bien précise.

3. DOMAINE DE VALIDITE DE LA THEORIE DES S.A LINEAIRES.

Tous les éléments intervenant dans une boucle d'asservissement doivent respecter certaines conditions auxquelles il faudra toujours chercher à se ramener pour pouvoir appliquer les résultats des études théoriques qui vont suivre.

3.1. Linéarité statique.

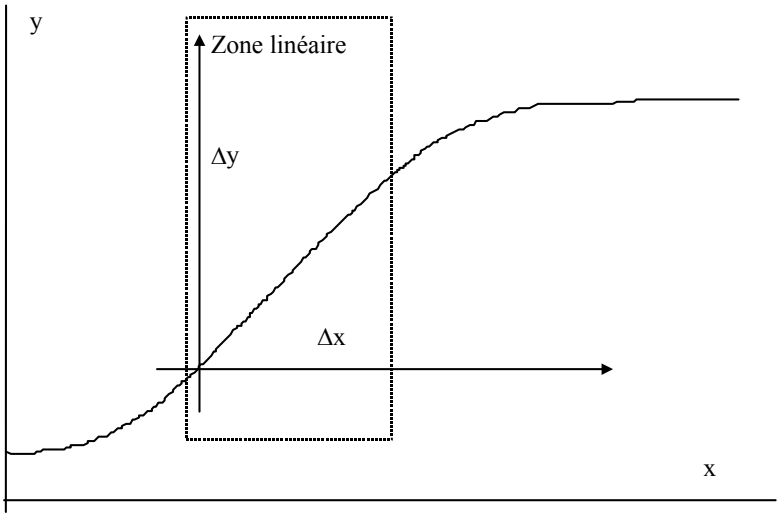
Si x et y sont respectivement l'entrée et la sortie d'un élément (système ou sous-système physique) liées par y = f(x) on doit avoir :

$$\frac{df(x)}{dx} = \text{constante}$$

$$f(0) = 0$$

ce qui revient à l'équation d'une droite y = K.x ; K est appelé **gain statique**.

Dans tous les cas de figure où ces conditions ne sont pas respectées, il faudra définir une zone restrictive de relation linéaire entre les seules **variations** : $\Delta y = K.\Delta x$ (*figure 2*)



- figure 2 -

3.2. Linéarité dynamique.

Les grandeurs d'entrée et de sortie sont également fonction du temps ; elles doivent être liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants telle que :

$$A_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} \cdots + A_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_0 y(t) = B_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \cdots + B_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B_1 \frac{dx(t)}{dt} + B_0 x(t)$$

◆ On dira que le système est **stationnaire** si les coefficients A_i et B_i sont constants, indépendants de t.

◆ Les systèmes physiques sont de plus **causals** c'est à dire que pour $t \leq 0$ on a toutes les dérivées nulles ainsi que $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$.

4. NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT.

4.1. Rappels sur la transformée de Laplace.

a. Définition.

Si f(t) est définie pour $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ on peut faire correspondre à f(t) une grandeur dite transformée telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt$$

⇨ **p** désigne l'opérateur de Laplace (mais noté **s** dans la littérature anglo-saxonne).

F(p) n'existe que si l'intégrale converge : cette question ne se pose généralement pas en Automatique où l'on traite de systèmes existant physiquement.

On définit de même une transformée inverse : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]$

b. Propriété de linéarité.

Si a est une constante : $\mathcal{L}\left[a.f(t)\right] = a.F(p)$

La transformée d'une somme est égale à la somme des transformées :

$$\mathcal{L}\left[f(t) + g(t)\right] = F(p) + G(p)$$

(idem pour les transformées inverses)

c. Dérivation et transformée.

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

Noter que nous aurons généralement à faire à des systèmes causals donc $f(0^+) = 0$ par hypothèse.

Toujours dans l'hypothèse de causalité (toutes dérivées nulles pour $t \leq 0$) on a la relation plus large :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n \cdot F(p)$$

d. Intégration et transformée.

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Noter la "dualité" des expressions...

e. Formule de la valeur initiale.

On peut calculer la valeur initiale de f(t), soit f(0), directement à partir de la transformée de Laplace sans recourir à la transformée inverse calculée pour t = 0.

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} p \cdot F(p)$$

f. Formule de la valeur finale.

On peut calculer de même la valeur finale en régime permanent lorsque le temps t tend vers l'infini ; noter que la formule n'a de sens que si la limite existe !

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{p\to 0} p \cdot F(p)}$$

4.2. Fonction de transfert.

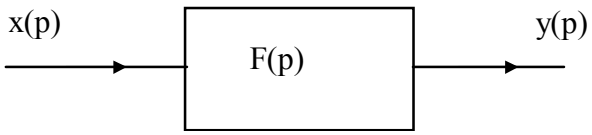
Compte tenu des propriétés de la transformée de Laplace, il est immédiat de transformer l'équation différentielle ci-dessus (§ 3.2) en équation algébrique ; en effet :

$$A_m p^m Y(p) \cdots + A_2 p^2 Y(p) + A_1 p Y(p) + A_0 Y(p) = B_n p^n X(p) \cdots + B_2 p^2 X(p) + B_1 p X(p) + B_0 X(p)$$

On peut à présent factoriser et écrire :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{B_n p^n + \cdots + B_2 p^2 + B_1 p + B_0}{A_m p^m + \cdots + A_2 p^2 + A_1 p + A_0}$$

F(p) est appelée **fonction de transfert** du système d'entrée x et de sortie y ; c'est une fraction rationnelle de polynômes en p .
Pour symboliser la relation qui existe entre l'entrée x(p) et la sortie y(p) on utilise la convention graphique du **bloc-diagramme** :



Bien se rappeler que la notion de fonction de transfert "cache" une équation différentielle faisant intervenir le temps ; elle traduit donc, en une notation compacte, aussi bien le comportement *statique* (soit y = f(x)) que *dynamique* (y = f(t)).

4.3. Factorisation.

Si on écrit une fonction de transfert sous la forme $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ on pourra toujours factoriser selon les racines des polynômes N(p) et D(p). Ainsi on définit :

◆ les **pôles** d'un système:

p_i, p_j sont les racines de l'équation D(p) = 0 ; on les appelle aussi les pôles de la fonction de transfert ; noter que les p_i sont des pôles simples (tous distincts) tandis que les p_j sont des pôles multiples de multiplicité α_j ($\alpha_j = 2$: pôle double, etc...). Enfin, un pôle complexe est toujours accompagné de son conjugué.

◆ les **zéros** d'un système:

D'une manière identique, les racines du numérateur N(p) = 0 sont appelées "zéros" de la fonction de transfert.

La fonction de transfert se met alors sous la forme dite factorisée:

$$F(p) = \frac{a(p - z_1)\cdots(p - z_m)}{b(p - p_1)\cdots(p - p_i)\cdots(p - p_j)^{\alpha}}$$

4.4. Décomposition en éléments simples.

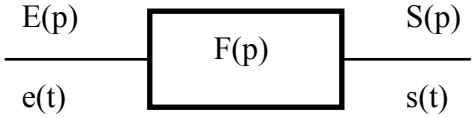
Toute fraction rationnelle de polynômes peut également être décomposée en une somme de termes plus simples ; on écrira :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_i \frac{A_i(p)}{(p - p_i)} + \sum_j \frac{A_j(p)}{(p - p_j)^{\alpha}}$$

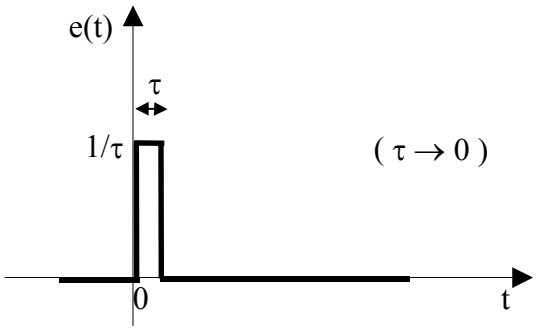
On reconnaît les pôles définis ci-dessus. Il ne peut y avoir que des pôles réels et des pôles complexes conjugués. Comme par ailleurs les pôles multiples sont plutôt rares dans les systèmes physiques, cela veut dire que toute fonction de transfert peut se ramener à la somme (ou mise parallèle) de fonctions de base du 1er ordre (un pôle réel) ou du 2^{ième} ordre (deux pôles complexes conjugués). Ces fonctions de base méritent donc une étude attentive par la suite.

5. REPONSE A DES ENTREES PARTICULIERES.

On ne saurait étudier le comportement d'un système pour tous les types de commande envisageables ; on se contentera en général de caractériser la réponse à quelques types simples avec utilisation d'un vocabulaire spécifique.



5.1. Réponse impulsionnelle.



L'entrée est ici une *impulsion* de Dirac unité e(t) = δ(t) dont la transformée s'écrit E(p) = 1 (élément neutre de la transformation de Laplace). Par conséquent il vient :

$$S(p) = E(p).F(p) = F(p)$$

Dans ce cas particulier s(t) ne sera autre que l'original (transformée inverse) de la fonction de transfert :

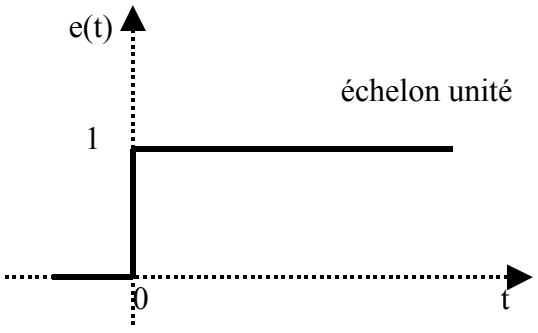
$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right] = f(t)$$

Pour cette raison, on appelle f(t) également **réponse impulsionnelle**.

5.2. Réponse indicielle.

L'entrée est un *échelon* unité défini par :

$$e(t) = 1 \forall t \geq 0$$
$$e(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$



La transformée de ce signal s'écrit : $E(p) = \frac{1}{p}$

☞***Remarque*** : Quelle sera la valeur finale de la sortie (régime permanent ou statique) ?

En application du théorème de la valeur finale, il vient, sachant que S(p) = E(p).F(p) :

$$s(\infty) = \lim_{p \to 0}\left[pE(p)F(p)\right] = \lim_{p \to 0} F(p) = F(0)$$

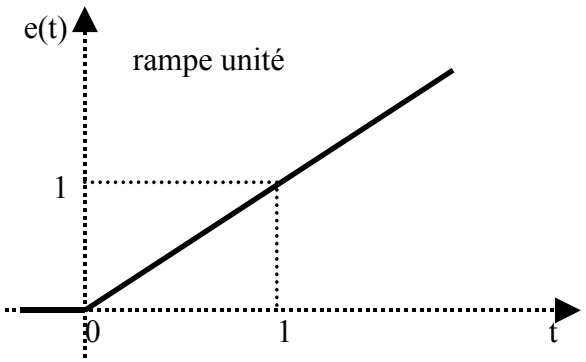
Le gain statique s'obtient en faisant p = 0 dans la fonction de transfert.

Le gain statique d'un système n'est autre que F(0).

5.3. Réponse à une rampe.

Il peut être nécessaire parfois de caractériser la réponse à un signal *rampe* ou réponse en vitesse ; un tel signal est défini par :

$$e(t) = t \forall t \geq 0$$
$$e(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$



La transformée d'une rampe de pente unité s'écrit : $E(p) = \frac{1}{p^2}$

5.4. Réponse harmonique.

L'entrée est une sinusoïde : $e(t) = E_M.\sin\omega t$. Plutôt que d'étudier la réponse temporelle s(t) directement on préfère passer par la notion de **gain complexe** ou **réponse en fréquence**. En remplaçant p par jω on obtient F(jω) qui est une fonction complexe de la pulsation ω.

$$\mathbf{p \rightarrow j\omega}$$
F(p) **F(j ω)**

On appelle :

$|F(j\omega)|$: **module** du gain
$\varphi = \arg[F(j\omega)]$: **phase** (souvent exprimée en degrés)

On peut alors donner facilement l'expression de $s(t) = S_M.\sin(\omega t - \psi)$ avec :

$$S_M = E_M \cdot |F(j\omega)|$$
$$\psi = \varphi(\omega)$$