

Table des matières

1	Groupes monogènes. Groupes cycliques. Exemples	23
1.1	Groupes monogènes	23
1.2	Sous-groupes d'un groupe monogène	25
1.2.1	D'un groupe monogène infini	25
1.2.2	D'un groupe cyclique	26
1.3	Exemples	28
1.3.1	Produit de groupes cycliques	28
1.3.2	Sur un corps fini	29
2	Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications	31
2.1	Permutations d'un ensemble fini	31
2.2	Décomposition d'une permutation	35
2.3	Signature	36
2.4	Applications	38
2.4.1	Théorème de Cayley	38
2.4.2	Le jeu du taquin	39
3	Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications	41
3.1	L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	41
3.2	Applications	43
3.2.1	Théorème des restes chinois	43
3.2.2	Théorèmes d'Euler et de Fermat	44
3.2.3	Théorème de Wilson	45
3.2.4	Critère d'Eisenstein	46
4	Nombres premiers	49
4.1	Présentation	49
4.2	Applications	51

4.2.1	Théorèmes d'Euler et de Fermat	51
4.2.2	Théorème de Wilson	53
4.2.3	Système R.S.A.	53
4.2.4	Critère d'Eisenstein	54
5	PGCD dans $\mathbb{K}[X]$, où \mathbb{K} est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications	57
5.1	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	57
5.2	Théorème de Bézout	60
5.3	Applications	62
5.3.1	Théorème fondamental de l'arithmétique	62
5.3.2	Lemme des noyaux	64
6	Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs	67
6.1	Dimension d'un espace vectoriel	67
6.2	Relations entre les dimensions	70
6.3	Rang d'une famille de vecteurs	72
6.4	Carrés magiques	73
7	Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples	75
7.1	Formes linéaires et hyperplans	75
7.2	Orthogonalité et dualité	77
7.3	Formes linéaires et sous-espaces vectoriels	81
7.4	Théorème de représentation de Fréchet-Riesz	82
8	Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications	83
8.1	Généralités	83
8.2	Applications	87
8.2.1	Équations différentielles	87
8.2.2	Théorème de Cayley-Hamilton	88
9	Changements de bases en algèbre linéaire. Applications	91
9.1	Changements de bases	91
9.1.1	Matrices de passages	91
9.1.2	Matrices équivalentes	93
9.1.3	Matrices semblables	95
9.2	Applications	96

9.2.1	Diagonalisation d'une matrice carrée	96
9.2.2	Trigonalisation d'une matrice carrée	97
9.2.3	Calcul des puissances d'une matrice carrée	99
9.2.4	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants	100
10	Déterminants. Applications	103
10.1	Déterminant d'une matrice	103
10.1.1	Généralités	103
10.1.2	Matrice de permutation	106
10.1.3	Matrice triangulaire	107
10.2	Calculs de déterminants	108
10.2.1	Déterminant d'un produit	108
10.2.2	Développement suivant une ligne ou une colonne	109
10.3	Applications	112
10.3.1	Déterminant de Vandermonde	112
10.3.2	Formule de Cramer	113
10.3.3	Inverse d'une matrice	115
11	Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications	117
11.1	Opérations élémentaires et propriétés	117
11.2	Applications	121
11.2.1	Calcul du rang d'une matrice	121
11.2.2	Résolution d'un système linéaire	122
11.2.3	Calcul de l'inverse d'une matrice	123
11.2.4	Déterminant de Vandermonde	124
11.2.5	Décomposition LU d'une matrice	126
12	Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3	129
12.1	Généralités	129
12.2	Cas de la dimension 2	133
12.3	Cas de la dimension 3	135
13	Utilisation des nombres complexes en géométrie	141
13.1	Nombres complexes et géométrie	141
13.2	Deux lieux géométriques	142
13.3	Similitudes directes	144
13.4	Quelques théorèmes	145

13.4.1	Caractérisation d'un triangle équilatéral	145
13.4.2	Caractérisation de la cocyclicité	146
13.4.3	Théorème de Ptolémée	147
13.4.4	Théorème de Napoléon	147
13.4.5	Théorème de Van Aubel	148
14	Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications	151
14.1	Généralités	151
14.2	Réduction	153
14.3	Applications	155
14.3.1	Endomorphisme symétrique sur l'espace des polynômes	155
14.3.2	Racine cubique d'une matrice symétrique réelle	156
14.3.3	Endomorphismes symétriques positifs	158
14.3.4	Décomposition polaire	160
15	Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques	163
15.1	Réduction d'une forme quadratique	164
15.2	Classification des formes quadratiques réelles	167
15.3	Applications géométriques	170
15.3.1	Classement des coniques	170
15.3.2	Extremum d'une fonction de plusieurs variables	172
16	Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications	175
16.1	Groupe des isométries du plan affine	175
16.2	Classification des isométries du plan affine	176
16.3	Applications	179
16.3.1	Expression complexe	179
16.3.2	Groupe diédral	181
17	Barycentres. Applications	183
17.1	Fonction vectorielle de Leibniz	183
17.2	Applications	186
17.2.1	Caractérisation des applications affines	186
17.2.2	Théorème de Ceva	187
17.2.3	Fonction scalaire de Leibniz	188
17.2.4	Théorème de Gauss-Lucas	189
17.2.5	Fonction convexe	189

18 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples	191
18.1 Généralités	191
18.2 Homothéties et translations	194
18.3 Projecteurs et symétries	197
18.4 Points fixes d'une application affine	199
19 Droites et cercles dans le plan affine euclidien	201
19.1 Droites du plan affine euclidien	201
19.2 Cercles du plan affine euclidien	204
19.3 Lignes de niveau	207
19.4 Inversion	208
20 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes	211
20.1 L'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$	211
20.2 Dérivation de polynômes	214
20.3 Théorème fondamental de l'algèbre	218
20.4 Relations coefficients-racines	220
21 Notion de rang en algèbre linéaire. Applications	223
21.1 Rang d'une famille de vecteurs	223
21.2 Rang d'une application linéaire	224
21.3 Rang d'une matrice	226
21.4 Applications	229
21.4.1 Systèmes linéaires	229
21.4.2 Interpolation de Lagrange	229
21.4.3 Somme de deux applications linéaires	230
21.4.4 Règle de Hörner	230
22 Coniques	233
22.1 Définitions monofocales	233
22.2 Équations cartésiennes	234
22.3 Représentations paramétriques	236
22.4 Équation polaire	237
22.5 Définitions bifocales	238
22.6 Réduction des coniques	239

23 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications	245
23.1 Généralités	245
23.2 Diagonalisation	249
23.3 Trigonalisation	251
23.4 Décomposition de Jordan-Dunford	252
23.5 Applications	255
23.5.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée	255
23.5.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants	256
23.5.3 Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants	256
24 Systèmes linéaires. Applications	257
24.1 Généralités sur les systèmes linéaires	257
24.2 Applications	262
24.2.1 Avec un paramètre	262
24.2.2 Inversion d'une matrice	263
24.2.3 Points alignés	264
24.2.4 Points coplanaires	265
24.2.5 Droites concourantes ou parallèles	266
24.2.6 Que la lumière soit	267
25 Valeurs propres. Recherche et utilisation	269
25.1 Recherche des valeurs propres	269
25.2 Utilisation des valeurs propres	273
25.2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme	273
25.2.2 Théorème spectral et conséquences	275
25.2.3 Points fixes d'une application affine	278
26 Arithmétique dans \mathbb{Z}	281
26.1 Division euclidienne dans \mathbb{Z}	281
26.2 PGCD et PPCM de deux entiers relatifs	282
26.3 Équations diophantiennes	285
26.4 Nombres premiers	286
27 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications	289
27.1 Généralités	289
27.2 Applications	293

27.2.1	Groupe des symétries du cube	293
27.2.2	Combinatoire	295
27.2.3	Groupes finis	297
27.2.4	Théorème de Cauchy	298
28	Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications	299
28.1	Endomorphisme diagonalisable	299
28.2	Applications	302
28.2.1	Décomposition de Jordan-Dunford	302
28.2.2	Calcul des puissances d'une matrice carrée	304
28.2.3	Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants	306
28.2.4	Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants	308
29	Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications	311
29.1	Généralités	311
29.2	Décomposition en éléments simples	314
29.3	Applications	317
29.3.1	Quelques décompositions en éléments simples	317
29.3.2	Un calcul de primitive	317
29.3.3	Un calcul de somme	318
30	Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications	319
30.1	Groupe des nombres complexes de module 1	319
30.2	Racines de l'unité	322
30.3	Applications	324
30.3.1	Calculs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	324
30.3.2	Racines n -èmes d'un nombre complexe	325
30.3.3	Triangle équilatéral dans le plan	325
30.3.4	Calculs de sommes	326
31	Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients- racines	327
31.1	Racines d'un polynôme à une indéterminée	327
31.2	Relations coefficients-racines	331
31.3	Applications	332

31.3.1	Calcul d'une fonction symétrique	332
31.3.2	Résoudre un système d'équations algébriques symétriques . . .	332
31.3.3	Zéros de polynômes dérivés successifs	333
31.3.4	Théorème de Joachimsthal	334
32	Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications	335
32.1	Suites récurrentes d'ordre 1	335
32.2	Méthode de Newton	338
32.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	340
33	Séries à termes réels positifs. Applications	345
33.1	Étude de la convergence	345
33.1.1	Critères de convergence	345
33.1.2	Condition nécessaire de convergence	347
33.2	Quelques outils	348
33.2.1	Test intégral	348
33.2.2	Comparaisons directe et logarithmique	349
33.2.3	Règles de Cauchy et de d'Alembert	351
33.2.4	Règle de Raabe-Duhamel	353
33.3	Formule de Stirling	354
34	Séries à termes ou complexes : convergence absolue, semi-convergence	357
34.1	Convergence absolue et semi-convergence	357
34.2	Théorème d'Abel	359
34.3	Opérations sur les séries	361
34.3.1	Commutativité	361
34.3.2	Associativité	362
34.3.3	Distributivité	364
35	Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications	367
35.1	Normes usuelles	367
35.2	Applications linéaires	369
35.3	Compacité	370
35.3.1	Généralités	370
35.3.2	En dimension finie	371

36	Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions	375
36.1	Produit scalaire et orthogonalité	375
36.2	Projection orthogonale	378
36.3	Séries de Fourier	381
37	Parties compactes de \mathbb{R}^n. Fonctions continues sur de telles parties. Exemples et applications	383
37.1	Parties compactes de \mathbb{R}^n	383
37.1.1	Deux définitions équivalentes	383
37.1.2	Caractérisation	385
37.2	Fonctions continues sur un compact	386
37.3	Applications	387
37.3.1	Équivalence des normes en dimension finie	387
37.3.2	Théorème de Rolle	388
37.3.3	Théorème fondamental de l'algèbre	389
37.3.4	Théorème de Riesz	390
38	Théorème des valeurs intermédiaires. Applications	393
38.1	Théorème des valeurs intermédiaires	393
38.2	Applications	396
38.2.1	Théorème des cordes universelles	396
38.2.2	Théorème du point fixe	397
38.2.3	Théorèmes de la moyenne	397
38.2.4	Théorème de Darboux	398
38.2.5	Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires	399
39	Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples	401
39.1	Différents modes de convergence	401
39.2	Propriétés de la somme	406
39.2.1	Continuité	406
39.2.2	Intégration	406
39.2.3	Dérivation	407
40	Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples	411
40.1	Convergence d'une série entière	411
40.2	Propriétés de la fonction somme	414
40.3	Convergence au bord	417

41 Séries de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme.	
Exemples	421
41.1 Approche géométrique	421
41.2 Convergence uniforme en moyenne de Cesàro	424
41.3 Convergence en moyenne quadratique	427
41.4 Convergence simple	428
41.5 Synthèse et exemples	429
42 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π	433
42.1 Exponentielle complexe	433
42.2 Fonctions trigonométriques	436
42.3 Résolution de $\sin(z) = a$ où $a \in \mathbb{R}$	438
42.4 Le nombre π en géométrie	439
42.5 Détermination principale du logarithme	440
43 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications	443
43.1 Cas d'une fonction monotone	443
43.2 Cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{K}	446
43.3 Applications	447
43.3.1 Équivalent des sommes partielles d'une série divergente	447
43.3.2 Constante d'Euler-Mascheroni	448
43.3.3 Formule de Stirling	448
43.3.4 Évaluation du reste d'une série convergente	450
44 Théorème des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications	451
44.1 Fonction d'une variable réelle	451
44.2 Fonction de plusieurs variables réelles	454
44.3 Applications	455
44.3.1 Variations d'une fonction	455
44.3.2 Théorème limite de la dérivée	456
44.3.3 Quelques théorèmes	457
45 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications	461
45.1 Généralités	461
45.2 Caractérisation géométrique	463
45.3 Caractérisation par les pentes	464
45.4 Caractérisation par la dérivée	466
45.5 Applications	467

45.5.1 Classement des moyennes	467
45.5.2 Inégalités de Hölder et Minkowski	467
45.5.3 Intégrale d'une fonction convexe	469
46 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications	471
46.1 Formule de Taylor-Young	471
46.2 Formules de Taylor-Lagrange	473
46.3 Applications	475
46.3.1 Déterminer une limite	475
46.3.2 Comportement local d'une fonction	475
46.3.3 Développement en série entière	476
46.3.4 Inégalités de Kolmogorov	478
47 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples	481
47.1 Existence d'une fonction réciproque	481
47.2 Continuité d'une fonction réciproque	482
47.3 Dérivabilité d'une fonction réciproque	483
47.4 Réciproque d'une fonction circulaire	485
47.5 Réciproque d'une fonction hyperbolique	488
48 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur	493
48.1 Méthode des rectangles	493
48.2 Méthode du point milieu	495
48.3 Méthode des trapèzes	496
48.4 Méthode de Simpson	498
49 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples	501
49.1 Présentation de l'intégrale impropre	501
49.2 Propriétés de l'intégrale impropre	504
49.3 Comparaison	507
49.4 Critère d'Abel	509
50 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications	511
50.1 Intégrale sur un compact	511
50.2 Intégrale impropre	515

50.3	Fonction gamma d'Euler	519
50.4	Transformée de Laplace	520
51	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de \mathbb{R}, à valeurs réelles ou complexes	521
51.1	Généralités	522
51.2	Résolution de l'équation homogène	524
51.2.1	Connaissant une base de \mathcal{S}_0	524
51.2.2	Méthode de Lagrange	525
51.3	Résolution de l'équation générale	526
51.3.1	Connaissant une solution particulière	526
51.3.2	Méthode de variation des constantes	526
51.4	Problème de raccords	527
51.5	Utilisation des séries entières	528
51.6	Zéros de solutions	529
52	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples	531
52.1	Généralités	531
52.2	Solution générale de (E_0)	533
52.3	Solution particulière de (E)	536
52.3.1	Variation des constantes	536
52.3.2	Principe de superposition des solutions	538
52.4	Intervention de l'exponentielle de matrice	539
53	Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classes C^1. Exemples	541
53.1	Différentiabilité	541
53.2	Propriétés	545
53.3	Applications continûment différentiables	548
54	Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles. Applications	551
54.1	Étude à l'ordre 1	551
54.2	Étude à l'ordre 2	552
54.3	Cas des fonctions de deux variables réelles	555
54.4	Extremum global	557
54.5	Applications	558

54.5.1	La vallée mystérieuse	558
54.5.2	Triangle inscrit dans une ellipse	558
54.5.3	Extremum sur un compact	559
55	Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli.	
	Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale	561
55.1	Loi de Bernoulli et loi binomiale	562
55.2	Théorème de Bernoulli	564
55.3	Théorème de Stone-Weierstrass	566
55.4	Approximations de la loi binomiale	567
56	Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Variance, covariance. Exemples	571
56.1	Probabilité conditionnelle et indépendance	572
56.2	Variables aléatoires indépendantes	574
56.3	Variance et covariance	575
56.4	Exemples	579
	56.4.1 Probabilités et arithmétique	579
	56.4.2 Somme de variables de Poisson	580
57	Espérance, variance ; loi faible des grands nombres	581
57.1	Espérance et variance d'une variable aléatoire	581
57.2	Quelques lois usuelles	585
57.3	Loi faible des grands nombres	588
58	Variables aléatoires possédant une densité. Exemples	591
58.1	Généralités	591
58.2	Exemples	595
	58.2.1 Loi uniforme	595
	58.2.2 Loi exponentielle	596
	58.2.3 Loi normale	596
58.3	Inégalités	598
59	Intégrales et primitives	599
59.1	Théorème fondamental de l'analyse	599
59.2	Calculs d'intégrales	602
	59.2.1 Méthode de l'intégration par parties	602
	59.2.2 Méthode du changement de variable	603

59.3 Applications	604
59.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral	604
59.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange	605
60 Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple :	
Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité...	607
60.1 En analyse	607
60.1.1 Convexité	607
60.1.2 Classement des moyennes	609
60.1.3 Inégalités de Hölder et Minkowski	610
60.1.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien complexe .	612
60.1.5 Inégalité des accroissements finis	613
60.2 En probabilités	613
61 Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples	
d'utilisation	615
61.1 Généralités	615
61.2 Variance, covariance et corrélation linéaire	616
61.3 Exemples	622
62 Étude métrique des courbes planes	625
62.1 Longueur d'une courbe plane	625
62.2 Abscisse curviligne	627
62.3 Courbure	629
63 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie	633
63.1 Convergence	633
63.2 Complétude	635
63.3 Compacité	638
64 Fonctions développables en série entière	641
64.1 Généralités	641
64.2 Opérations	644
64.3 Fonctions élémentaires usuelles	645
64.4 Fonction exponentielle complexe	646
64.5 Nombres de Catalan	647

65 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples	649
65.1 Caractérisation des applications linéaires continues	649
65.2 Équivalence des normes	651
65.3 Cas des formes linéaires	652
65.4 Cas des applications bilinéaires	652
65.5 Norme subordonnée d'une application linéaire continue	653
66 La fonction Gamma	659
66.1 Étude de la fonction	660
66.2 Propriétés	663
66.3 Équivalents aux bornes	666
Annexes	669
Quelques dérivées usuelles	669
Quelques primitives usuelles	670
Quelques développements limités usuels	671
Quelques formules trigonométriques	672
Plan d'étude d'une courbe paramétrée	673
Plan d'étude d'une courbe polaire	674
Décomposition d'une matrice	675
Diagonalisation et trigonalisation d'une matrice	675
Quelques groupes classiques	676
Groupe cyclique	676
Groupe symétrique	676
Groupe général linéaire	677
Groupe orthogonal	678
Groupe affine	679
Bibliographie	681
Index	683