Chapitre 1

Suites

L'objet de ce chapitre n'a pas d'autre ambition que d'introduire quelques rappels élémentaires utiles à la manipulation des séries.

I Suites numériques

1 Définition

Une suite numérique est une image d'une application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ n & \mapsto & g(n) \end{array}$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ peut être remplacé par E avec $E \subset \mathbb{N}$; l'ensemble $\mathbb{N}$ peut même être remplacé par $\mathbb{Z}$ ou une partie de $\mathbb{Z}$. $\diamond$

Notation. On pose

$$u_n = g(n)$$

que l'on appelle terme général de la suite et on parle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, simplement, (u_n) ou $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$.

En pratique. Une suite numérique peut être définie par

- la donnée des u_i s'ils sont en nombre fini ou
- la donnée du terme général u_n ou
- une relation de récurrence à deux termes

$$u_n = f_2(u_{n-1})$$

avec la donnée d'un terme (en général le premier) ou une relation de récurrence à trois termes

$$u_n = f_3(u_{n-1}, u_{n-2})$$

avec la donnée de deux termes (en général les deux premiers) où f_2 et f_3 sont deux fonctions données.

Exemple 1. L'énumération $1, 2, \cdots, 100$ définit la suite des cent premiers entiers positifs.

Exemple 2. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dite suite harmonique, a pour terme général

$$u_n = \frac{1}{n}$$

Ici l'application correspondante est $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} : n \mapsto g(n) = \frac{1}{n}$. On peut aussi définir cette suite numérique par l'énumération $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$.

Exemple 3. La relation de récurrence

$$u_n = (n+1)u_{n-1}, \quad u_0 = 1$$

définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'élément u_0 est donné ; on en déduit $u_1 = 2u_0 = 2$, puis $u_2 = 3u_1 = 6$, etc.

Exemple 4. La relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1$$

définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dite suite de Fibonacci. On a évidemment $u_3 = u_2 + u_1 = 1$, puis $u_4 = u_3 + u_2 = 2$, etc.

NB 1. Dans le cas d'une suite définie par une relation de récurrence on parle de suite récurrente.

NB 2. De façon générale, la suite est dite finie (respectivement, infinie) si elle a un nombre fini (respectivement, infini) de termes.

2 Convergence d'une suite infinie

a Définition

On dit que la suite numérique (u_n) est convergente et converge vers u si $u_n \to u$ lorsque $n \to \infty$. Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - u) = 0$$

ce que l'on peut traduire par

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n > \eta(\varepsilon) : |u_n - u| < \varepsilon$$

et l'on écrit $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente. $\diamond$

b Unicité

La limite u si elle existe est unique. $\diamond$

Démonstration (*ab absurdo*). On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ_1 et ℓ_2. On a alors

$$\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + u_n - \ell_2 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}(\ell_1 - \ell_2) = \lim_{n\to\infty}(\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2)$$

Donc

$$\ell_1 - \ell_2 = \lim_{n\to\infty}(\ell_1 - u_n) + \lim_{n\to\infty}(u_n - \ell_2)$$

D'où $\ell_1 - \ell_2 = 0 + 0 = 0$ et finalement $\ell_1 = \ell_2$.

c Propriétés

Soit deux suites convergentes (u_n) et (v_n) de limites u et v, respectivement. Alors, on a les propriétés suivantes.

P1. Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, la suite (λu_n) converge vers λu et la suite (λv_n) vers λv. $\diamond$

P2. La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v$. $\diamond$

P3. La suite $(u_n v_n)$ converge vers uv. $\diamond$

P4. La suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{u}{v}$ si $v \neq 0$. $\diamond$

d Suite de Cauchy

Par définition, une suite (u_n) est dite de Cauchy si

$$\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty}(u_p - u_q) = 0$$

(p et q tendent vers l'infini indépendamment l'un de l'autre) soit encore

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall p > \eta(\varepsilon) \; \forall q > \eta(\varepsilon) : |u_p - u_q| < \varepsilon$$

en termes de η et de ε. $\diamond$

e Théorème (Cauchy)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique soit convergente est qu'elle soit de Cauchy. $\diamond$

Démonstration (partielle). La condition est nécessaire. En effet, si la suite (u_n) converge vers u, on a

$$u_p - u_q = u_p - u + u - u_q$$

et donc en faisant $p \to \infty$ et $q \to \infty$ indépendamment l'un de l'autre

$$\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty}(u_p - u_q) = \lim_{p\to\infty}(u_p - u) + \lim_{q\to\infty}(u - u_q) = 0 + 0 = 0$$

si bien que la suite (u_n) est de Cauchy. On admettra que la condition est suffisante c'est-à-dire que toute suite de Cauchy est convergente.

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait que pour s'assurer qu'une suite est convergente il suffit de vérifier qu'elle est une suite de Cauchy (sans qu'il soit besoin de déterminer la limite de la suite).

3 Suites monotones et suites bornées

On considère ici le cas de suites dans $\mathbb{R}$ avec $g : E \to \mathbb{R} : n \mapsto g(n) = u_n$ où E est $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.

a Définitions

- Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est dite monotone croissante si

$$\forall n \in E : u_{n+1} \geq u_n$$

Elle est dite monotone décroissante si

$$\forall n \in E : u_{n+1} \leq u_n$$

- Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est dite majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ (M = majorant) tel que

$$\forall n \in E : u_n \leq M$$

Elle est dite minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ (m = minorant) tel que

$$\forall n \in E : u_n \geq m$$

- Une suite majorée et minorée est dite bornée. $\diamond$

b Théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente. $\diamond$

4 Cas des suites récurrentes

Dans le cas d'une suite récurrente (u_n) définie par une relation de récurrence à deux termes $u_n = f_2(u_{n-1})$, la limite u, si elle existe, s'obtient à partir de

$$u = f_2(u)$$

qui fournit une équation permettant de calculer u. Lorsque l'on a obtenu u de cette façon, il faut s'assurer que la suite (u_n) converge.

II Suites de fonctions

1 Définition

Soit F l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. On appelle suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'image d'une application $\mathbb{N} \to F : n \mapsto f_n$ où $f_n : D \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} : t \mapsto f_n(t)$ avec $D \subset \mathbb{R}$ (le domaine D est $\mathbb{R}$ ou un intervalle dans $\mathbb{R}$). L'ensemble $\mathbb{N}$ peut être remplacé par une partie (finie ou pas) E de $\mathbb{N}$. $\diamond$

En pratique. On parle de la suite de fonctions

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (f_n) \text{ ou } f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$$

à laquelle est associée la suite numérique

$$\left(f_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ ou }\; \left(f_n(t)\right) \;\text{ ou }\; f_0(t), f_1(t), \cdots, f_n(t), \cdots$$

(il y a une suite numérique pour chaque valeur de t).

2 Convergence simple

Définition. On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f si pour tout $t \in D$ la suite numérique $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$ c'est-à-dire si

$$\forall t \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \;\Leftrightarrow\; f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

Autrement dit, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall t \in D \;\; \exists \eta(\varepsilon, t) \in \mathbb{N} \mid \forall n > \eta(\varepsilon, t) : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

où η dépend de ε et de t. $\diamond$

3 Convergence uniforme

a Définition

On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f si $\eta(\varepsilon, t) \equiv \eta(\varepsilon)$, c'est-à-dire que l'entier $\eta(\varepsilon)$ ne dépend pas de t. $\diamond$

b Critère de convergence uniforme

La convergence est uniforme sur D si

$$\sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

dès que $n > \eta(\varepsilon)$, soit encore si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)| = 0$$

cette dernière relation constituant un critère très utile. $\diamond$

La signification de la convergence uniforme s'obtient en traduisant graphiquement la relation

$$\forall t \in D : f(t) - \varepsilon < f_n(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{dès que} \quad n > \eta(\varepsilon)$$

(considérer les graphes de f et f_n en fonction de t).

Il est clair que la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

4 Propriétés des suites uniformément convergentes

Les suites de fonctions uniformément convergentes ont des propriétés remarquables. On donne ci-après trois propriétés (P1 à P3) et trois corollaires (C1 à C3) sans démonstration.

a Propriétés

P1 (continuité). Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur D qui converge uniformément sur D vers la fonction f, alors f est continue sur D. $\diamond$

P2 (intégration). Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur D fini ($D = [a, b]$) qui converge uniformément sur D vers la fonction f, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

(on peut intervertir les signes $\int$ et lim). $\diamond$

P3 (dérivation). Si (f_n) est une suite de fonctions continues et dérivables sur D fini qui converge uniformément sur D vers la fonction f et si $\left(\frac{d}{dt}f_n\right)$ est une suite de fonctions continues sur D qui converge uniformément sur D vers la fonction g, alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} f_n = \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} f_n \;\Rightarrow\; g = \frac{df}{dt}$$

et on peut donc intervertir les signes $\lim_{n\to\infty}$ et $\frac{d}{dt}$. $\diamond$

b Corollaires

C1. Si une suite de fonctions continues converge vers une fonction qui n'est pas continue, alors la convergence est simple. $\diamond$

C2. Si (sous des hypothèses évidentes)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

alors la convergence de (f_n) vers f est simple. $\diamond$

C3. Si (sous des hypothèses évidentes)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} f_n \neq \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} f_n = \frac{df}{dt}$$

alors la convergence de (f_n) vers f est simple. $\diamond$

III Exercices

Exercice 1

On considère la suite finie $1, 2, \cdots, 100$. Calculer la somme des termes de cette suite. Plus généralement, montrer que la somme S_N des termes de la suite finie $1, 2, \cdots, N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ est donnée par

$$S_N = \frac{1}{2} N(N+1)$$

Solution

Il suffit d'écrire $S_N = 1 + 2 + \cdots + N$ et $S_N = N + \cdots + 2 + 1$ d'où l'on tire $2S_N = N(N+1)$ en ajoutant terme à terme les deux relations. Pour $N = 100$, on obtient $S_{100} = 5050$.

Exercice 2

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution

La suite est divergente car $\lim_{n\to\infty} = +1$ ou -1 suivant que n est pair ou impair.

Exercice 3

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \frac{n-1}{n+1}$$

est-elle convergente ?

Solution

Pour n suffisamment grand, le numérateur et le dénominateur de u_n se comportent comme n de sorte que $u_n \to 1$ pour $n \to \infty$. Il en résulte que la suite converge vers 1.

Exercice 4

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \tan^{-1}\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

est-elle convergente ?

Solution

Il suffit d'appliquer la définition de la fonction $\tan^{-1}$ (ou arc tangente) pour montrer que la suite converge vers $\frac{\pi}{2}$. En effet, $\tan u_n = n + \frac{1}{n} \to \infty$ pour $n \to \infty$ de sorte que $u_n \to \frac{\pi}{2}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 5

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Déterminer la limite de cette suite.

Solution

Il suffit de poser $x = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On a donc $u_n = \frac{\sin x}{x} \to 1$ pour $x \to 0$ de sorte que la limite de la suite est 1.

Exercice 6

Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dite suite harmonique, est convergente.

Solution

Il est clair que la suite converge vers 0 car $\frac{1}{n} \to 0$ pour $n \to \infty$.