Chapitre 1

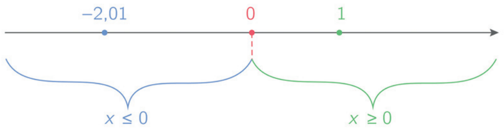
Étude de fonctions

I. Réels et intervalles

A. L'ensemble des réels

Définition

L'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des nombres qu'il est possible de placer sur un axe gradué (appelé droite des réels).



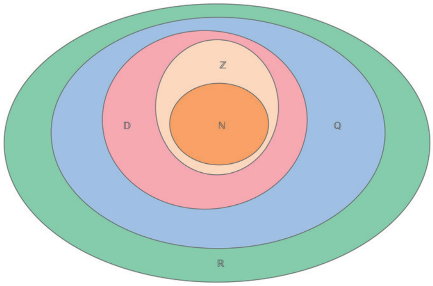
Propriété

Les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est inclus dans $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est inclus dans $\mathbb{D}$.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est inclus dans $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est inclus dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ sont donc inclus dans $\mathbb{R}$.



B. Les intervalles de réels

Définition

Soient deux réels a et b tels que $a < b$.
On appelle intervalle de réels une partie (continue) de la droite des réels :

- x appartient à l'intervalle $[a;b]$ signifie que $a \leq x \leq b$.
- x appartient à l'intervalle $]a;b[$ signifie que $a < x < b$.
- x appartient à l'intervalle $]a;b]$ signifie que $a < x \leq b$.
- x appartient à l'intervalle $[a;b[$ signifie que $a \leq x < b$.
- x appartient à l'intervalle $[a;+\infty[$ signifie que $a \leq x$.

Définition

- x appartient à l'intervalle $]a;+\infty[$ signifie que $a < x$.
- x appartient à l'intervalle $]-\infty;a]$ signifie que $x \leq a$.
- x appartient à l'intervalle $]-\infty;a[$ signifie que $x < a$.

■ ***Exemple***

Si $3 < x \leq 4$, alors on peut écrire $x \in]3;4]$.

Si $x < 8$, alors on peut écrire $x \in]-\infty;8[$.

Remarque

- $+\infty$ se lit : « plus l'infini ».
- $-\infty$ se lit : « moins l'infini ».
- Une borne infinie d'intervalle implique toujours un crochet ouvert.

Propriété

Pour représenter un intervalle sur la droite des réels, on marque :

- Un crochet fermé si la borne est incluse dans l'intervalle.
- Un crochet ouvert si la borne est exclue de l'intervalle.

■ ***Exemple***

On représente ci-dessous l'intervalle $[a;b[$:

II. Les fonctions numériques

A. Principe

Définition

On appelle fonction numérique, ou simplement fonction, un procédé qui associe, à tout réel x d'une partie E de $\mathbb{R}$, un unique réel y. On note :

$$f(x) = y$$

Remarque

Si l'on connaît l'expression de la fonction f, on peut exprimer $f(x)$ en fonction de la variable x.

■ ***Exemple***

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x + 1$, associe à la variable x la valeur $y = 2x + 1$.

B. Images et antécédents

Définition

On appelle image de x par f le réel y qui vérifie :

$$f(x) = y$$

■ *Exemple*

L'image de 5 par la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x + 1$ est égale à : $f(5) = 2 \times 5 + 1 = 11$

Remarque

Si elle existe, l'image de x par f est unique.

Définition

On appelle antécédent(s) de y par f le(s) réel(s) x qui vérifie(nt) :

$$f(x) = y$$

■ *Exemple*

11 est l'image de 5 par f, définie par $f(x) = 2x + 1$, donc 5 est un antécédent de 11 par f.

Remarque

Un réel peut admettre zéro, un ou plusieurs antécédents par f.

■ *Exemple*

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.
4 étant à la fois l'image de 2 et de –2 par f, 4 admet deux antécédents par f.
La fonction f étant à valeurs positives, –5 n'a pas d'antécédents par f.

III. Études de fonctions

A. Domaine de définition

Définition

On appelle ensemble ou domaine de définition de la fonction f, noté D_f, l'ensemble des réels qui ont une image par f.

■ *Exemple*

La fonction $f(x) = 5x^2$ est définie pour tout réel x. On note $D_f = \mathbb{R}$.

Définition

On appelle valeur interdite un réel dont on ne peut calculer l'image par f.

■ ***Exemple***

On ne peut pas calculer l'image de -1 par la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ car on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif. Donc -1 est une valeur interdite pour cette fonction.

Soit $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Sachant qu'on ne peut pas diviser par 0, 0 n'a pas d'image par f.

Le réel 0 est ainsi une valeur interdite de la fonction f.

Remarque

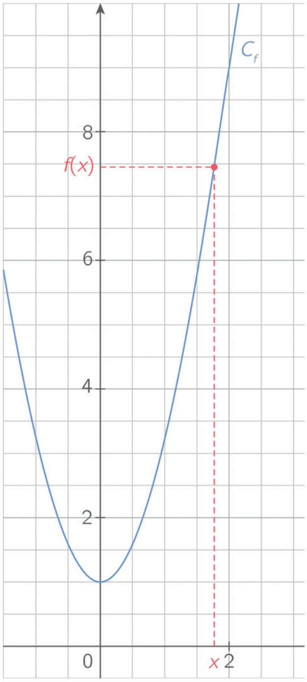
Si le réel a est la seule valeur interdite de la fonction f, on exclut la valeur a du domaine de définition en écrivant : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{a\}$ ou $D_f=\mathbb{R}-\{a\}$.

Dans le cas où f n'est pas définie en 0, on écrit communément : $D_f=\mathbb{R}^\star$ (lire « R étoile »).

B. La courbe représentative

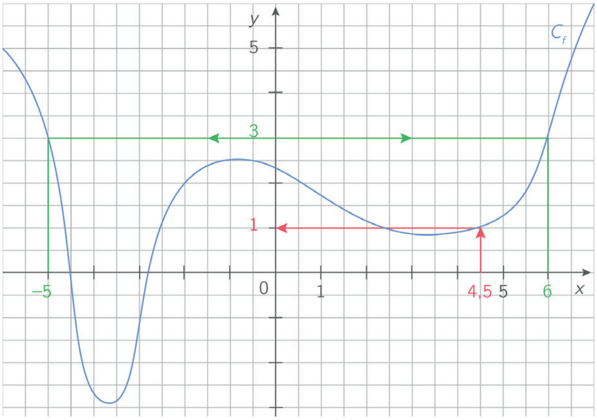
Définition

La courbe représentative C_f d'une fonction f dans un repère du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, pour tous les réels x du domaine de définition de f.



Propriété

- L'image de x par f est l'ordonnée du point de C_f d'abscisse x.
- Les antécédents de y par f sont les abscisses des points de C_f d'ordonnée y.



■ *Exemple*

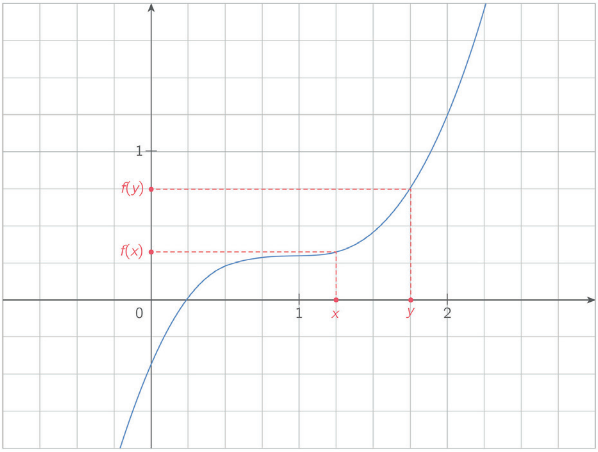
- L'image de 4,5 est 1.
- Les antécédents de 3 sont –5 et 6.

C. Le sens et le tableau de variations

Définition

Une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si elle est définie sur I, et pour tous réels x et y de I tels que $x < y$:

$$f(x) \leq f(y)$$

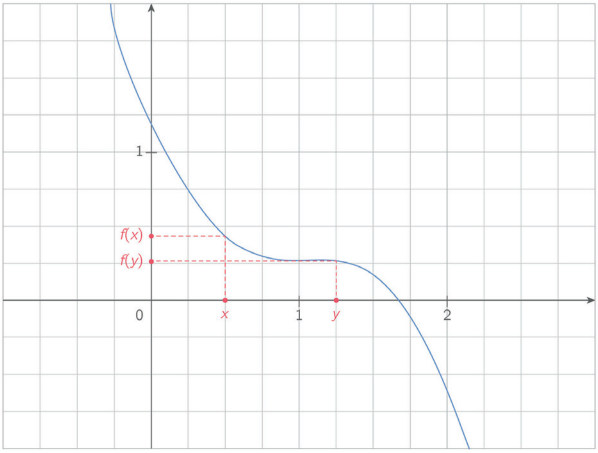


→ Allure de la courbe représentative d'une fonction croissante

Définition

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I si et seulement si elle est définie sur I, et pour tous réels x et y de I tels que $x < y$:

$$f(x) \geq f(y)$$



→ Allure de la courbe représentative d'une fonction décroissante

Définition

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si elle est définie sur I, et pour tous réels x et y de I tels que $x < y$:

$$f(x) < f(y)$$

Remarque

Toute fonction strictement croissante sur un intervalle I est également croissante sur I.

Définition

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si et seulement si elle est définie sur I, et pour tous réels x et y de I tels que $x < y$:

$$f(x) > f(y)$$

Remarque

Toute fonction strictement décroissante sur un intervalle I est également décroissante sur I.

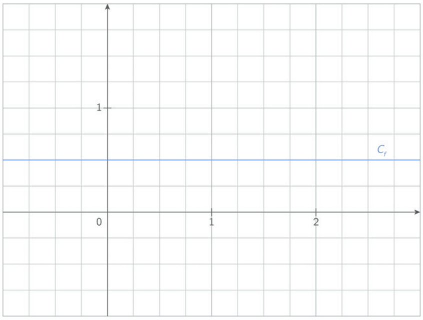
Définition

Une fonction f est constante sur un intervalle I si et seulement si elle est définie sur I et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel x de I :

$$f(x) = a$$

■ ***Exemple***

On représente ci-après la fonction constante définie par $f(x) = \frac{1}{2}$, pour tout réel x :



→ Allure de la courbe représentative d'une fonction constante

Propriété

On peut résumer les variations de la fonction f à l'aide d'un tableau de variations :

- Une flèche montante signifie que la fonction est croissante sur cet intervalle.
- Une flèche descendante signifie que la fonction est décroissante sur cet intervalle.
- Une double barre signifie que le réel correspond à une valeur interdite.
- On note enfin les valeurs de la fonction aux réels où elle change de sens de variation.

■ ***Exemple***

x	-3		$-1,5$		2		$+\infty$
f	5	↘	0	↗	‖	↘	

Le tableau de variations de la fonction f ci-dessus permet d'en déduire que :

- f est décroissante sur l'intervalle $[-3;-1,5]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[-1,5;2[$;
- f est décroissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$;

$f(-3) = 5$

$f(-1,5) = 0$

2 est une valeur interdite.