Chapitre 1

Les trinômes du second degré

I. Les trinômes du second degré : caractérisation

Définition

On appelle fonction trinôme du second degré (ou fonction polynôme du second degré, ou plus simplement trinôme) toute fonction T définie sur $\mathbb{R}$ et admettant une expression du type :

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

Où a, b et c sont des réels quelconques avec $a \neq 0$.

■ ***Exemple***

La fonction définie pour tout réel x par $P(x) = 2x^2 + x - 3$ est un trinôme du second degré.

Définition

Avec les notations précédentes, on appelle discriminant du trinôme T le réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

■ ***Exemple***

On calcule le discriminant du trinôme défini pour tout réel x par $P(x) = 2x^2 + 1x - 3$:

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3)$

$\Delta = 1 - (-24) = 1 + 24 = 25$

Définition

Soit T une fonction trinôme du second degré. On appelle forme canonique de $T(x)$ toute forme du type :

$$T(x) = a[(x - \alpha)^2] + \beta$$

Où a, α et β sont des réels quelconques avec $a \neq 0$.

Théorème

Soit T une fonction trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Alors, la forme canonique de $T(x)$ est unique et donnée par :

$$T(x) = a\left[(x - \alpha)^2\right] + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

■ ***Exemple***

La forme canonique du trinôme P, défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$, se détermine en calculant α et β.

$$\alpha = \frac{-(-5)}{2 \times 3} = \frac{5}{6} \text{ et } \beta = \frac{-((-5)^2 - 4 \times 3 \times 1)}{4 \times 3} = -\frac{13}{12}$$

Ainsi, la forme canonique est :

$$P(x)=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}$$

II. Variations des fonctions trinôme du second degré

Soit T une fonction trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels quelconques avec $a\neq 0$. Notons $T(x)=a\left[(x-\alpha)^2\right]+\beta$ sa forme canonique.

- Cas 1 : Si $a>0$

  Le trinôme est décroissant sur $]-\infty;\alpha]$ et croissant sur $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
T		$\searrow$	β	$\nearrow$	

- Cas 2 : Si $a<0$

  Le trinôme est croissant sur $]-\infty;\alpha]$ et décroissant sur $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
T		$\nearrow$	β	$\searrow$	

III. Représentation graphique

Définition

On appelle parabole toute représentation graphique d'une fonction trinôme dans un repère du plan.

Définition

On appelle sommet de la parabole le point correspondant à l'extremum de la fonction trinôme.

Théorème

Soit T une fonction trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
La courbe représentative du trinôme T est une parabole, de sommet S :

$$S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

■ ***Exemple***

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$.
On a ici : $a = 5$, $b = -2$, $c = 1$
Donc :

- $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$
- $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-2)^2 - 4 \times 5 \times 1}{4 \times 5} = -\dfrac{-16}{20} = \dfrac{4}{5}$

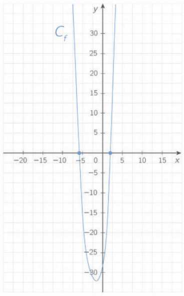
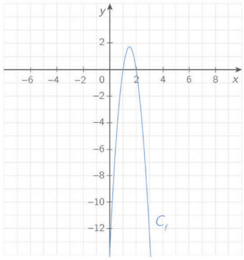
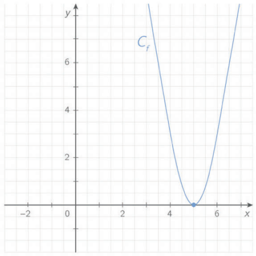
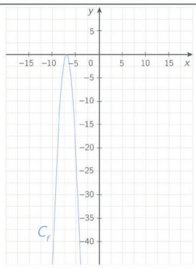
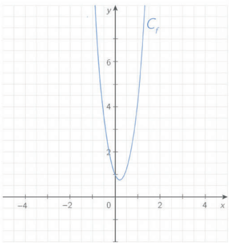
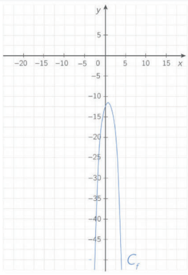
La courbe représentative de la fonction $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ est donc une parabole de sommet S de coordonnées : $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{4}{5}\right)$.

Propriété

L'allure de la parabole représentative du trinôme T dépend du signe de a :

- Si $a > 0$, alors la parabole décroît puis croît et le trinôme admet donc un minimum (égal à l'ordonnée du sommet de la parabole).
- Si $a < 0$, alors la parabole croît puis décroît et le trinôme admet donc un maximum (égal à l'ordonnée du sommet de la parabole).

Soit T une fonction trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On note Δ son discriminant. On peut donner le tableau récapitulatif suivant donnant l'allure de la parabole représentative du trinôme T :

	$a > 0$	**$a < 0$**
$\Delta > 0$	Allure de la parabole si $a > 0$ et $\Delta > 0$	Allure de la parabole si $a < 0$ et $\Delta > 0$
		
	La courbe représentative de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 24$ avec $a = 2$ et $\Delta = 256$ a une allure similaire à celle ci-dessus.	La courbe représentative de la fonction $f(x) = -7x^2 + 21x - 14$ avec $a = -7$ et $\Delta = 49$ a une allure similaire à celle ci-dessus.
$\Delta = 0$	Allure de la parabole si $a > 0$ et $\Delta = 0$	Allure de la parabole si $a < 0$ et $\Delta = 0$
		
	La courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 - 30x + 75$ avec $a = 3$ et $\Delta = 0$ a une allure similaire à celle ci-dessus.	La courbe représentative de la fonction $f(x) = -5x^2 - 70x - 245$ avec $a = -5$ et $\Delta = 0$ a une allure similaire à celle ci-dessus.
$\Delta < 0$	Allure de la parabole si $a > 0$ et $\Delta < 0$	Allure de la parabole si $a < 0$ et $\Delta < 0$
		
	La courbe représentative de la fonction $f(x) = 5x^2-2x+1$ avec $a = 5$ et $\Delta = -16$ a une allure similaire à celle ci-dessus.	La courbe représentative de la fonction $f(x) = -3x^2 + 4x - 13$ avec $a = -3$ et $\Delta = -140$ a une allure similaire à celle ci-dessus.

IV. Racines du trinôme

Définition

Soit T une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Les racines du trinôme $T(x)$ sont les valeurs de x pour lesquelles celui-ci s'annule.
Ce sont les solutions de l'équation $T(x) = 0$, c'est-à-dire $ax^2 + bx + c = 0$.

Soit T une fonction trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Notons Δ son discriminant.

➡ Cas 1 : Si $\Delta < 0$

Le trinôme n'a pas de racine réelle.

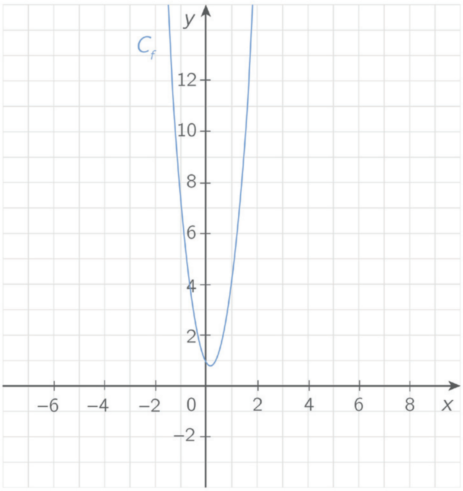
■ ***Exemple***

Considérons le polynôme $P(x) = 5x^2 - 2x + 1$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 1 = -16$

Le polynôme ne possède pas de racine réelle, car $\Delta < 0$.

On constate effectivement que sa courbe représentative n'a pas d'intersection avec l'axe des abscisses :



➡ Cas 2 : Si $\Delta = 0$

Le trinôme a une racine unique que l'on appelle racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Exemple

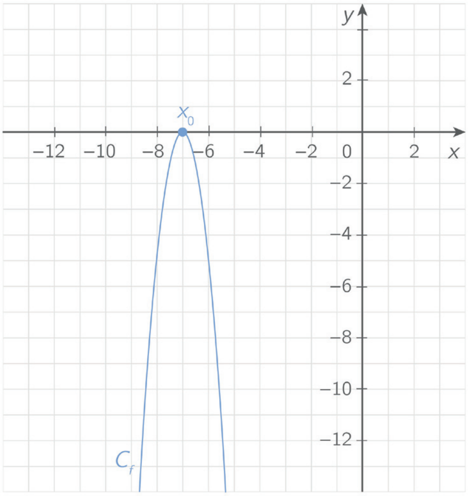
Considérons le polynôme $P(x) = -5x^2 - 70x - 245$.

$\Delta = (-70)^2 - 4 \times (-5) \times (-245) = 0$

Le polynôme possède une racine double, car $\Delta = 0$.

$$x_0 = \frac{-(-70)}{2 \times (-5)} = -7$$

On constate effectivement que sa courbe representative a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses :



➡ Cas 3 : Si $\Delta > 0$

Le trinôme a deux racines réelles distinctes :

- $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple

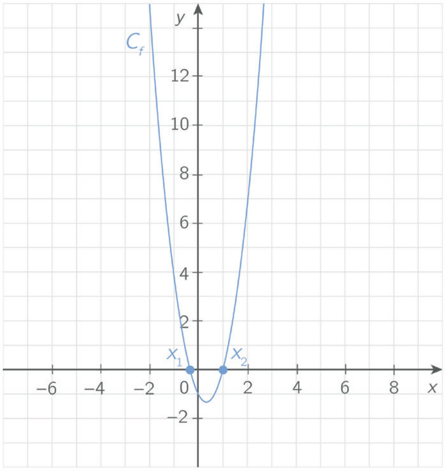
Considérons le polynôme $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On a donc $\Delta > 0$. Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 3} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times 3} = 1$$

On constate effectivement que sa courbe representative a deux points d'intersection sur l'axe des abscisses :



V. Factorisation du trinôme

Soit T une fonction trinôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Notons Δ son discriminant.

➡ Cas 1 : Si $\Delta < 0$

Le trinôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

■ ***Exemple***

Considérons le polynôme $P(x) = 5x^2 - 2x + 1$.

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 5\times 1 = -16$

Le polynôme ne possède pas de racine réelle, car $\Delta < 0$.

On ne peut pas factoriser le trinôme dans $\mathbb{R}$.