Méthodes

1

Outils de raisonnement

Bien des questions basées sur des raisonnements classiques reviennent inlassablement dans les concours que vous allez subir et bon nombre d'étudiants sèche sur celles-ci.
Ainsi, le raisonnement par l'absurde est parfois mal rédigé, les équivalences proposées par les candidats sont souvent mal justifiées.
Mettons donc à plat tous ces outils !

Méthode 1.1 : Utilisation de la contraposée

L'utilisation de la contraposée (ou contraposition) vient souvent en application d'un résultat précédemment montré.
Sinon elle peut être employée pour ne pas affronter une question de manière directe.
Elle consiste en :

$$\text{montrer } (P \Longrightarrow Q) \text{ revient à montrer que } ((\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P))$$

✓ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que : si $\forall\, \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon$ alors $a \leq b$

Raisonnons par contraposée et montrons plutôt que :

$$a > b \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ a \geq b + \varepsilon$$

Avec l'hypothèse $a > b$, on a donc $a - b > 0$ et, ainsi, on peut trouver un $\alpha > 0$ tel que $a - b = \alpha$.
En choisissant alors $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, on a bien $a \geq b + \varepsilon$.

Méthode 1.2 : Raisonnement par l'absurde

Là encore, on veut montrer que $P \Longrightarrow Q$ et contourner le raisonnement direct ; on suppose alors que l'on a P et aussi non Q pour finalement arriver à une contradiction.

✓ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 2I$ et $A^2 = 2A$.
Montrer que A n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit inversible.
On multiplie alors la relation $A^2 = 2A$ par A^{-1} (à gauche ou à droite) et cela nous donne : $A = 2I$.
Ceci étant en contradiction avec l'hypothèse de départ, on vient de montrer que A n'est pas inversible.

Méthode 1.3 : Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux temps :
⋆ on suppose l'énoncé vrai pour arriver à des conditions nécessaires
⋆ puis, on démontre que ces conditions sont suffisantes.

✓ Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en $A = A_1 + A_2$ où A_1 est symétrique (${}^tA_1 = A_1$) et A_2 est antisymétrique (${}^tA_2 = -A_2$).

Analyse : supposons qu'une telle décomposition $A = A_1 + A_2$ (1) existe. En passant à la transposée, on a (par linéarité) :

$${}^tA = {}^tA_1 + {}^tA_2 = A_1 - A_2 \quad (2)$$

Avec (1) + (2), on a : $A_1 = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ et avec (1) − (2), on a : $A_2 = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. D'où l'unicité.
Synthèse : posons $A_1 = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ et $A_2 = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.
On vérifie que A_1 est symétrique : ${}^tA_1 = \frac{1}{2}({}^tA + A) = A_1$,
et A_2 antisymétrique : ${}^tA_2 = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -A_2$.
Aussi, on a $A = A_1 + A_2$, d'où l'existence d'une telle décomposition.

Méthode 1.4 : Raisonnement par équivalence

On a globalement deux méthodes pour montrer une équivalence :
⋆ garder toutes les équivalences au fil de la démonstration (mais c'est risqué...).
⋆ procéder par double implication (il y a très fréquemment une implication plus simple que l'autre).

✓ Soit α un réel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $Sp(\alpha A) = \{\alpha\lambda \text{ où } \lambda \in Sp(A)\}$.

On va utiliser la caractérisation du spectre d'une matrice et raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} a \in Sp(\alpha A) &\iff \exists X \neq 0,\ (\alpha A)X = aX \\ &\iff \exists X \neq 0,\ \alpha(AX) = aX \\ &\iff \exists X \neq 0,\ AX = \frac{a}{\alpha}X \\ &\iff \frac{a}{\alpha} \in Sp(A) \\ &\iff a \in \{\alpha\lambda \text{ où } \lambda \in Sp(A)\} \end{aligned}$$

Grâce aux équivalents, on peut conclure que :

$$Sp(\alpha A) = \{\alpha\lambda \text{ où } \lambda \in Sp(A)\}$$

Méthode 1.5 : Montrer l'existence et l'unicité

Rq : Notez bien le « et » entre les deux mots, donc il y a bien 2 choses à montrer et on va procéder en 2 temps.

Pour prouver l'existence d'un élément, on peut envisager :
- l'explicitation d'un tel élément par une illumination spontanée ou inspiration inespérée !
- la construction
Pour prouver l'unicité d'un élément, il est classique de supposer qu'il en existe deux et d'arriver à une contradiction.

Notez qu'il y a des théorèmes donnant directement l'existence et l'unicité (comme le théorème de la bijection).

MÉTHODES

2

Ensembles

La théorie des ensembles est un point de départ pour tous les thèmes que nous pourrons voir par la suite. La manipulation de telles entités se fera autant en algèbre, en analyse qu'en probabilités.

2.1. Comment montrer que $x \in E$?

★ ★

Pour montrer que $x \in E$, il faut utiliser la caractérisation (ou la condition) définissant l'ensemble E et vérifier que l'élément x satisfait celle-ci.

✓ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $u = (1, -1) \in Ker(f + Id)$.

Comme on a la matrice A de f, on raisonne matriciellement.
Pour vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in Ker(A + I)$, on utilise la caractérisation de cet ensemble : $X \in Ker(A + I) \Longleftrightarrow (A + I)X = 0$.
On calcule donc : $(A + I) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.
Ainsi, on a $(f + Id)(u) = 0$ c'est-à-dire $u \in Ker(f + Id)$.

2.2. Comment montrer que $E \subset F$?

★ ★

Pour montrer que $E \subset F$, on montrera l'implication :

$$x \in E \Longrightarrow x \in F$$

✓ Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow Im\ f \subset Ker\ g$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $g \circ f = 0$ et montrons que $Im\ f \subset Ker\ g$.
Soit $y \in Im\ f$, alors $\exists x \in E,\ y = f(x)$.
On calcule alors :

$$g(y) = g \circ f(x) = 0$$

donc $y \in Ker\ g$ et ainsi on a l'inclusion $Im\ f \subset Ker\ g$.
($\Longleftarrow$) Supposons que $Im\ f \subset Ker\ g$ et montrons que $g \circ f = 0$.
En effet, pour tout $x \in E$, on a $g(f(x)) = 0$ car $f(x) \in Im\ f \subset Ker\ g$.

2.3. Comment montrer que $E = F$?

★ ★

Méthode 2.3.1 : par double inclusion

On a l'équivalence :

$$E = F \iff \big(E \subset F \text{ et } F \subset E\big)$$

On en revient alors à la méthode précédente.

✓ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $Im\ f \cap Ker\ f = \{0\} \iff Ker\ f = Ker\ f^2$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $Im\ f \cap Ker\ f = \{0\}$ et montrons par double inclusion que $Ker\ f = Ker\ f^2$.
L'inclusion $Ker\ f \subset Ker\ f^2$ est toujours vraie puisque pour $x \in Ker\ f$, on a $f(x) = 0$ et donc, par application de f linéaire, on obtient
$f^2(x) = f(0) = 0$ c'est-à-dire $x \in Ker\ f^2$.
Pour l'autre inclusion, on considère $x \in Ker\ f^2$ soit $f^2(x) = 0$.
On a donc $f(f(x)) = 0$ ce qui donne $f(x) \in Ker\ f$; or, par définition même, on a $f(x) \in Im\ f$ et donc $f(x) \in Ker\ f \cap Im\ f = \{0\}$ soit $f(x) = 0$ ou encore $x \in Ker\ f$.
($\Longleftarrow$) Supposons que $Ker\ f = Ker\ f^2$ et montrons $Im\ f \cap Ker\ f = \{0\}$.
Soit $x \in Im\ f \cap Ker\ f$; comme $x \in Im\ f$ on a donc : $\exists u \in E,\ x = f(u)$.
Comme $x \in Ker\ f$, on a $f(x) = 0$.
En combinant les deux informations, on a : $f(x) = f^2(u) = 0$; donc on a $u \in Ker\ f^2 = Ker\ f$ et alors $f(u) = x = 0$.
On a donc $Im\ f \cap Ker\ f \subset \{0\}$; l'inclusion réciproque étant évidente, on a l'égalité voulue.

L'erreur à ne plus commettre !

Lorsque vous voulez prouver qu'un sous-espace vectoriel F est réduit à $\{0\}$, n'oubliez pas l'inclusion, certes triviale, précisant que l'on a $\{0\} \subset F$ (car $0 \in F$).

Méthode 2.3.2 : par un argument sur les cardinaux

On a l'équivalence :

$$E = F \Longleftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ \\ card\ E = card\ F \end{cases}$$

L'erreur à ne plus commettre !

Ne confondez plus les notions de cardinal et de dimension.
Le cardinal est le nombre d'éléments composant un ensemble et la dimension est le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel.