

---

# Outils de raisonnement

*Bien des questions basées sur des raisonnements classiques reviennent inlassablement dans les concours que vous allez subir et bon nombre d'étudiants sèche sur celles-ci.*

*Ainsi, le raisonnement par l'absurde est parfois mal rédigé, les équivalences proposées par les candidats sont souvent mal justifiées.*

*Mettons donc à plat tous ces outils !*

**Méthode 1.1 : Utilisation de la contraposée**

L'utilisation de la contraposée (ou contraposition) vient souvent en application d'un résultat précédemment montré.

Sinon elle peut être employée pour ne pas affronter une question de manière directe.

Elle consiste en :

montrer  $(P \implies Q)$  revient à montrer que  $((\text{non } Q) \implies (\text{non } P))$

✓ Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que : si  $\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon$  alors  $a \leq b$

Raisonnons par contraposée et montrons plutôt que :

$$a > b \implies \exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon$$

Avec l'hypothèse  $a > b$ , on a donc  $a - b > 0$  et, ainsi, on peut trouver un  $\alpha > 0$  tel que  $a - b = \alpha$ .

En choisissant alors  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ , on a bien  $a \geq b + \varepsilon$ .

**Méthode 1.2 : Raisonnement par l'absurde**

Là encore, on veut montrer que  $P \implies Q$  et contourner le raisonnement direct; on suppose alors que l'on a  $P$  et aussi non  $Q$  pour finalement arriver à une contradiction.

✓ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A \neq 2I$  et  $A^2 = 2A$ .  
Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $A$  soit inversible.

On multiplie alors la relation  $A^2 = 2A$  par  $A^{-1}$  (à gauche ou à droite) et cela nous donne :  $A = 2I$ .

Ceci étant en contradiction avec l'hypothèse de départ, on vient de montrer que  $A$  n'est pas inversible.

**Méthode 1.3 : Raisonnement par analyse-synthèse**

Le raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux temps :  
 \* on suppose l'énoncé vrai pour arriver à des conditions nécessaires  
 \* puis, on démontre que ces conditions sont suffisantes.

✓ Montrer que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose de manière unique en  $A = A_1 + A_2$  où  $A_1$  est symétrique ( ${}^t A_1 = A_1$ ) et  $A_2$  est antisymétrique ( ${}^t A_2 = -A_2$ ).

*Analyse* : supposons qu'une telle décomposition  $A = A_1 + A_2$  (1) existe. En passant à la transposée, on a (par linéarité) :

$${}^t A = {}^t A_1 + {}^t A_2 = A_1 - A_2 \quad (2)$$

Avec (1) + (2), on a :  $A_1 = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$  et avec (1) - (2), on a :  $A_2 = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$ . D'où l'unicité.

*Synthèse* : posons  $A_1 = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$  et  $A_2 = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$ .

On vérifie que  $A_1$  est symétrique :  ${}^t A_1 = \frac{1}{2}({}^t A + A) = A_1$ ,

et  $A_2$  antisymétrique :  ${}^t A_2 = \frac{1}{2}({}^t A - A) = -A_2$ .

Aussi, on a  $A = A_1 + A_2$ , d'où l'existence d'une telle décomposition.

**Méthode 1.4 : Raisonnement par équivalence**

On a globalement deux méthodes pour montrer une équivalence :  
 \* garder toutes les équivalences au fil de la démonstration (mais c'est risqué...)  
 \* procéder par double implication (il y a très fréquemment une implication plus simple que l'autre).

✓ Soit  $\alpha$  un réel non nul et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 Montrer que :  $Sp(\alpha A) = \{\alpha \lambda \text{ où } \lambda \in Sp(A)\}$ .

On va utiliser la caractérisation du spectre d'une matrice et raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
 a \in Sp(\alpha A) &\iff \exists X \neq 0, (\alpha A)X = aX \\
 &\iff \exists X \neq 0, \alpha(A)X = aX \\
 &\iff \exists X \neq 0, AX = \frac{a}{\alpha}X \\
 &\iff \frac{a}{\alpha} \in Sp(A) \\
 &\iff a \in \{\alpha\lambda \text{ où } \lambda \in Sp(A)\}
 \end{aligned}$$

Grâce aux équivalents, on peut conclure que :

$$Sp(\alpha A) = \{\alpha\lambda \text{ où } \lambda \in Sp(A)\}$$

**Méthode 1.5 : Montrer l'existence et l'unicité**

*Rq : Notez bien le « et » entre les deux mots, donc il y a bien 2 choses à montrer et on va procéder en 2 temps.*

*Pour prouver l'existence d'un élément, on peut envisager :*

- *l'explicitation d'un tel élément par une illumination spontanée ou inspiration inespérée !*
- *la construction*

*Pour prouver l'unicité d'un élément, il est classique de supposer qu'il en existe deux et d'arriver à une contradiction.*

*Notez qu'il y a des théorèmes donnant directement l'existence et l'unicité (comme le théorème de la bijection).*

---

# Ensembles

*La théorie des ensembles est un point de départ pour tous les thèmes que nous pourrons voir par la suite. La manipulation de telles entités se fera autant en algèbre, en analyse qu'en probabilités.*





**Méthode 2.3.2 : par un argument sur les cardinaux**

On a l'équivalence :

$$E = F \iff \begin{cases} E \subset F \\ \text{card } E = \text{card } F \end{cases}$$

**L'erreur à ne plus commettre !**

Ne confondez plus les notions de cardinal et de dimension.

Le cardinal est le nombre d'éléments composant un ensemble et la dimension est le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel.