Chapitre 1

Probabilités

L'essentiel du cours

Notion d'évènement

Expérience aléatoire

Quand on ne peut prévoir le résultat d'une expérience, on dit que celle-ci est aléatoire.
On appelle alors univers, l'ensemble des résultats possibles de cette expérience ; on le note en général Ω.

Le conseil du prof :
La bonne lecture de l'expérience aléatoire est primordiale.
Il faut savoir quel type d'éléments on cherche : un entier, un couple d'entiers ou autre chose ? à quoi correspond-il ? quelles sont ses valeurs possibles ?

Évènement

Un évènement est une partie de l'univers Ω.

Réalisation d'évènement

$\star$ On dira que l'évènement A est réalisé si le résultat de l'expérience est dans A.
$\star$ Si A et B sont des évènements, alors $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique celle de B.
$\star$ L'égalité $A = B$ signifie que l'on a $A \subset B$ et $B \subset A$.

Le conseil du prof :
Concrètement, pour montrer que $A \subset B$, on partira de l'évènement A en supposant qu'il est réalisé. On s'écrit alors la conclusion à atteindre : la réalisation de B ; et, entre l'hypothèse et la conclusion, on agit par différentes implications et déductions.

Opérations sur les évènements

On note A et B des évènements de Ω.
⋆ L'évènement $\overline{A}$, appelé l'évènement contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.
⋆ L'évènement $A \cup B$, appelé réunion (ou union) de A et B, est réalisé si et seulement si A l'est ou si B l'est.
⋆ L'évènement $A \cap B$, appelé intersection de A et B, est réalisé si et seulement si A et B le sont.

Le conseil du prof :
La notion de contraposée nous permet d'affirmer que :

$$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Système complet d'évènements

⋆ Si l'on a deux évènements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$, alors on dira qu'ils sont incompatibles (ou disjoints).
⋆ Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements de Ω (où $I \subset \mathbb{N}$) sera appelée système complet d'évènements si :

- $\forall i, j \in I,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Le conseil du prof :
Sauf demande explicite de l'énoncé, vous n'aurez pas à justifier que telle famille est un système complet d'évènements.

Tribu d'évènements

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$; on dira que $\mathcal{A}$ est une tribu si :

⋆ $\Omega \in \mathcal{A}$
⋆ $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au contraire)
⋆ $\forall i \in I,\ A_i \in \mathcal{A}$ (où $I \subset \mathbb{N}$) $\Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ (stabilité par union)

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des évènements de Ω ; le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Coefficients binomiaux

Factorielle

Soit E un ensemble fini à n éléments.
On appelle permutation de E, tout choix de n éléments tous distincts dans E.
Il y en a factorielle n et on note $n!$:

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Coefficient binomial

Le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments (où $0 \leq p \leq n$) est $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ (on le lit p parmi n) et il est défini par :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les relations importantes

$\star$ La symétrie :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$$

$\star$ La petite formule : $\forall n, p \geq 1$,

$$p \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$$

$\star$ Le triangle de Pascal : pour tout $n \geq 1$ et p tel que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$$

Les conseils du prof :

$\star$ *La petite formule sera très utile dans le calcul d'espérance ou de variance où l'on peut retrouver des termes de la forme* $k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Parfois, on pourra appliquer 2 fois cette formule et avoir :

$$k(k-1)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n(n-1)\begin{pmatrix} n-2 \\ k-2 \end{pmatrix}$$

$\star$ *La différence de coefficients binomiaux peut être simplifiée par le triangle de Pascal :* $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$.

Probabilité

Définition

On appelle probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$\star$ $P(\Omega) = 1$

$\star$ $\forall (A_i)_{i\in I}$ (où $I \subset \mathbb{N}$) une suite d'évènements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, $P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sera alors appelé espace probabilisé.

Propriétés

$\star$ Pour tout évènement A, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$\star$ Pour toute famille finie $(A_i)_{i=1}^n$ d'évènements deux à deux incompatibles, on a :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$\star$ Pour tout évènement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$.

$\star$ Croissance : pour tout couple d'évènements (A, B) tel que $A \subset B$, on a : $P(A) \leq P(B)$.

Formule du crible de Poincaré

⋆ Pour 2 évènements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

⋆ Pour 3 évènements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Théorèmes de limite monotone

⋆ Pour une suite croissante d'évènements $(A_n)_n$ $(A_n \subset A_{n+1})$, on a :

$$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

⋆ Pour une suite décroissante d'évènements $(A_n)_n$ $(A_{n+1} \subset A_n)$, on a :

$$P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

Le conseil du prof :
On prendra le temps et soin de montrer que la suite $(A_n)_n$ est croissante ou décroissante par traduction (comme il l'a été précisé dans le paragraphe de la réalisation d'évènement).

Équiprobabilité

On dira que l'on a équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.
Dans ce cas, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour réaliser } A}{\text{nombre de cas favorables au total}}$$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit un évènement A de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de probabilité non nulle.
L'application $B \mapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on appelle la probabilité conditionnelle relative à A.
Le réel $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, que l'on notera $P_A(B)$, est appelé la probabilité de B sachant A.

Le conseil du prof :
Pour appliquer cette formule, on n'oubliera pas de relever que $P(A) \neq 0$.

Les propriétés

$\star$ $P_A(\emptyset) = 0$, $P_A(\Omega) = 1$ et $\forall B$ vérifiant $B \subset A$, $P_A(B) = 1$.
$\star$ $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

Des formules importantes

Formule des probabilités composées

$\star$ Si $P(A) \neq 0$ alors on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

$\star$ Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.
On a la formule :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Le conseil du prof :
On peut éviter l'utilisation de cette formule par une traduction détaillée et séquencée de l'évènement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$.
On précisera l'évolution du modèle au fur et à mesure de l'expérience.

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (où $I \subset \mathbb{N}$).
Alors, pour tout évènement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Les conseils du prof :
$\star$ *Si le système complet est infini, alors la somme est une série ; on justifiera sa convergence grâce au fait qu'elle est égale à une probabilité.*

$\star$ *Si le système complet n'est pas donné explicitement, il peut être suggéré soit à travers la formule à prouver (si l'on doit montrer que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1)$ on s'appuiera sur le système complet $((X_n = 0), (X_n = 1))$) soit à travers des calculs de probabilités conditionnelles (on doit calculer $P(Y = 1)$ et on a déterminé $P_{(X=k)}(Y = 1)$ pour $0 \leq k \leq n$ donc prend comme système complet $(X = k)_{0\leq k\leq n}$).*

$\star$ *Il faut être vigilant sur le fait d'avoir un vrai système complet d'évènements c'est-à-dire que l'on recouvre bien tous les cas possibles.*

Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements (où $I \subset \mathbb{N}$). Alors, pour tout évènement B et $i \in I$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k\in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$