Chapitre

1

Ensemble, dénombrement

Programme officiel

> *Ce chapitre a pour but :*
> *- d'introduire les notions d'ensemble, de sous-ensemble ;*
> *- de définir une application, ses images directe et réciproque, ses propriétés ;*
> *- de modéliser certaines situations combinatoires.*

Exercice 1.1

□□□ *Objectif : présentation du théorème de Cantor.*

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de X dans $\mathcal{P}(X)$. On introduira l'ensemble $A = \{x \in X \ ; \ x \notin f(x)\}$.

Soit f une application de X dans $\mathcal{P}(X)$. Considérons le sous-ensemble A de X défini par $A = \{x \in X \ ; \ x \notin f(x)\}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in X$ tel que $A = f(a)$.

• Si $a \in A$, alors par construction de A, $a \notin f(a)$, ce qui n'est pas possible car $A = f(a)$.

• Si $a \notin A$, alors comme $A = f(a)$, $a \in A$ et on a encore une contradiction.

En résumé, il n'existe pas de $a \in X$ tel que $A = f(a)$. Il existe donc un élément de $\mathcal{P}(X)$ qui n'est pas dans l'image de f. Il n'y a donc pas d'application surjective de X dans $\mathcal{P}(X)$.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cantor.

Exercice 1.2

■□□ *Objectif : recherche de point fixe.*

Soit X un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$, croissante pour l'inclusion. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe Y partie de X telle que $f(Y) = Y$. On pourra considérer les parties Z de X telles que $Z \subset f(Z)$.

Soit $\mathcal{H} = \{Z \subset X \ ; \ Z \subset f(Z)\}$. Par exemple, $\emptyset \in \mathcal{H}$.

Considérons l'ensemble Y, union des éléments de $\mathcal{H}$ et montrons que $f(Y) = Y$.

⋆ On a $Y = \cup_{Z \in \mathcal{H}} Z$, donc $f(Y) = \displaystyle\bigcup_{Z \in \mathcal{H}} f(Z)$. Par conséquent, $f(Y) \supset Y$ puisque pour tout $Z \in \mathcal{H}$, $f(Z) \supset Z$.

⋆ Il résulte de l'alinéa précédent que $f^2(Y) \supset f(Y)$. Donc $f(Y) \in \mathcal{H}$ et, par définition de Y, on a que $Y \supset f(Y)$. Finalement, $f(Y) = Y$.

Exercice 1.3

■□□ *Objectif : nombre de p-listes strictement croissantes.*

Déterminer le nombre de p-listes $(x_i)_{i=1}^{p}$ telles que :

$$1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n.$$

Tout d'abord, on a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ choix possibles de p éléments distincts parmi les n possibles.
Ensuite, il faut leur imposer un rangement mais il n'y a qu'une seule possibilité de les ordonner vu qu'une fois choisis on a leur valeur (on appelle x_1 le plus petit, etc.).
Le nombre de p-listes $(x_i)_{i=1}^{p}$ vérifiant $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n$ est

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4

■□□ *Objectif : dénombrement, injectivité, surjectivité, monotonie.*

1. Quel est le nombre d'applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$?
2. Quel est le nombre d'applications injectives de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$?
3. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$?
4. Si $k > n$, combien y a-t-il d'applications surjectives de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$?

1. On en a k^n car pour tout élément de l'ensemble de départ on a k choix d'images.
2. Pour l'image de 1 il y a k choix possibles par une application f à valeurs dans $[\![1;k]\!]$.

   

   Comme cette application doit être injective, cela ne laisse que $k-1$ valeurs pour l'image de 2 (on doit avoir $f(1) \neq f(2)$) et ainsi de suite jusqu'à $k-n+1$ valeurs pour n.

On ne pourra construire un tel f que si $k - n + 1 \geq 1$ c'est-à-dire $k \geq n$ et dans un tel cas on obtient :

$$k(k-1)\cdots(k-n+1) = A_n^k \text{ possibilités.}$$

3. Il y en a $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$ car on doit former des n-listes $(x_i)_{i=1}^n$ vérifiant $1 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq p$ (et on utilise l'exercice précédent).
4. On veut que tout élément de $[\![1;k]\!]$ ait au moins un antécédent dans $[\![1;n]\!]$, ce qui sous-entend que $n \geq k$.
   Comme $k > n$, on conclut qu'il n'y en a aucune.

Exercice 1.5

■□□ *Objectif : autour des notions d'image directe, d'image réciproque et d'injectivité.*

Soit E et E' deux ensembles et $f : E \longrightarrow E'$ une application.

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Établir que :

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A.$$

1. Soit $x \in A$; on a alors $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
2. ($\Longrightarrow$) D'après la question 1., il suffit de montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
   Soit $x \in f^{-1}(f(A))$ donc $f(x) \in f(A)$; ainsi, il existe $a \in A$, $f(x) = f(a)$.
   Or, f est injective et donc $x = a \in A$.

   ($\Longleftarrow$) Soit $(a,b) \in E^2$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors :

   $$b \in f^{-1}(f(\{b\})) = f^{-1}(\{f(b)\}) = f^{-1}(\{f(a)\}) = f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}.$$

   Et alors on a $a = b$ et donc f est injective.

Exercice 1.6

■□□ *Objectif : autour des notions d'image directe, d'image réciproque et de surjectivité.*

Soit E et E' deux ensembles et $f : E \longrightarrow E'$ une application.

1. Montrer que : $\forall A' \in \mathcal{P}(E'),\ f(f^{-1}(A')) \subset A'$.
2. Établir que :

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow \forall A' \in \mathcal{P}(E'),\ f(f^{-1}(A')) = A'.$$

1. Soit $y \in f(f^{-1}(A'))$; $\exists x \in f^{-1}(A'),\ y = f(x)$.
   Or, $x \in f^{-1}(A')$ donc $f(x) \in A'$ et ainsi $y \in A'$.
2. ($\Longrightarrow$) D'après la question 1., il suffit de montrer que $A' \subset f(f^{-1}(A'))$.
   Soit $y \in A'$; comme f est surjective : $\exists x \in E,\ y = f(x)$.
   Alors, $x \in f^{-1}(A')$ et donc $y \in f(f^{-1}(A'))$.

   ($\Longleftarrow$) Avec $A' = E'$, on a $f(f^{-1}(E')) = E'$.
   On a :
   $$\forall y \in E',\ \exists x \in f^{-1}(E'),\ y = f(x)$$
   donc f est surjective.

Exercice 1.7

■□□ *Objectif : nombres de parties sous contrainte.*

Combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ contenant au moins un entier pair ?

Le « contenant au moins ... » nous incite à considérer le complémentaire : A l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant que des entiers impairs.
Comme il y a $E(\frac{n+1}{2})$ entiers impairs dans $[\![1, n]\!]$, le cardinal de A est $2^{E(\frac{n+1}{2})}$.
On a alors le cardinal recherché, c'est-à-dire $2^n - 2^{E(\frac{n+1}{2})}$.

Exercice 1.8

■□□ *Objectif : permutation de lettres.*

1. Combien de mots distincts a-t-on si l'on permute les lettres du mot « Mississippi » ?
2. Et si l'on impose que les quatre « s » ne soient pas consécutifs ?

1. Le mot « Mississippi » est constitué de 11 lettres dont 1m, 4i, 4s et 2p.

   Supposons dans un premier temps que les i, s et p soient discernables. Autrement dit que le mot en question est constitué de 11 lettres distinctes. On a dans ce cas 11! mots possibles.

   Traitons maintenant le cas de la lettre i car les 4 i du mot « Mississippi » sont bien entendu non discernables. Chaque mot dans le cas non discernable correspond a 4! mots dans le cas discernable. D'après le principe des Bergers, il y a alors $\frac{11!}{4!}$ mots possibles.

   Le cas des lettres s et p étant identique, on a finalement $\frac{11!}{4!\times 4!\times 2!} = 34650$ mots possibles.
2. Commençons par traiter le cas où les 4s sont consécutifs. Nous avons dans ce cas 8 possibilités pour placer le premier s. On a alors $\frac{8\times 7!}{4!\times 2!}$ mots possibles avec les 4s consécutifs. En passant au complémentaire, le nombre de mots ayant les s non consécutifs est

$$\frac{11!}{4!\times 4!\times 2!} - \frac{8\times 7!}{4!\times 2!} = 33810$$

Exercice 1.9

■□□ *Objectif : partitions d'un ensemble.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à $2n$ éléments, c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble à $2n$ éléments qui ne soient constituées que de paires.

1. Exprimer pour tout $n \geq 1$, a_{n+1} en fonction de a_n.
2. En déduire l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a_{n+1} est le nombre de partitions en paires d'un ensemble à $2(n+1) = 2n+2$ éléments.
   Ainsi, on a pour la 1re paire : $2n+1$ choix (une fois un élément choisi, on a $2n+1$ possibilités pour constituer cette paire).
   Ensuite, il reste $2n$ éléments qu'il faut partitionner en paires : a_n possibilités.
   D'où la relation :
   $$a_{n+1} = (2n+1)a_n.$$
2. On a successivement : $$\begin{aligned} a_n &= (2n-1)a_{n-1} \\ a_{n-1} &= (2n-3)a_{n-1} \\ &\cdots \\ a_3 &= 5a_2 \\ a_2 &= 3a_1 \end{aligned}$$
   Par produit (et télescopage), il nous vient :
   $$a_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3.$$
   Pour une formule plus compacte, introduisons les termes pairs manquants :
   $$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{(2n)!}{2n\cdots(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Exercice 1.10

■□□ *Objectif : étude de fonctions strictement croissantes sur des ensembles d'entiers.*

1. Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. Montrer que l'unique application strictement croissante de A dans elle-même est l'identité.
2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que, pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, on ait $f(mn) = f(m)f(n)$. Montrer que si f admet un point fixe $k > 1$, alors f est l'identité.

1.  Montrons que deux applications strictement croissantes de A dans A sont égales. Supposons en effet par l'absurde que ce n'est pas le cas et soit $X = \{x \in A\ ;\ f(x) \neq g(x)\}$. Cet ensemble non vide admet un plus petit élément, a, avec par exemple $f(a) < g(a)$.
   $\star$ Si $x \in A$ est tel que $x < a$, alors $g(x) = f(x) < f(a)$.
   $\star$ Si $x \in A$ est tel que $x \geq a$, alors $g(x) \geq g(a) > f(a)$.
   Il en résulte que $f(a)$ n'est pas dans l'image de g. Mais g est une injection d'un ensemble fini dans lui-même, donc une bijection : c'est une contradiction.
   Puisque Id_A est une application strictement croissante de A dans A, toute autre application strictement croissante de A dans A lui est égale.
2. Soit $k > 1$ un point fixe de f. On a $f(k) = k$. Il est immédiat que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(k^n) = k^n$. Considérons alors la restriction de f à $[\![0, k^n]\!]$ Comme f est strictement croissante et que $f(k^n) = k^n$, alors $[\![0, k^n]\!]$ est stable par f. D'après la question précédente, la restriction de f à $[\![0, k^n]\!]$ est donc l'identité de $[\![0, k^n]\!]$.
   Soit maintenant x entier quelconque. Il existe n tel que $x \leq k^n$. Par conséquent, $f(x) = x$.
   En conclusion, si f admet un point fixe $k > 1$, alors f est l'identité.

Exercice 1.11

■□□ *Objectif : autour de la fonction caractéristique d'une partie.*

Soit X un ensemble fini de cardinal n. On rappelle que si A est une partie de X, la fonction caractéristique de A est l'application χ_A de X vers $\{0, 1\}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & \mapsto & 1 \text{ si } x \in A \\ x & \mapsto & 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. .$$

Soit $x \in X$. Exprimer la somme $S = \displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} \chi_A(x)$.