Test blanc 1 pour Accès

Cette épreuve est composée de trois parties :
- Partie 1 : 6 exercices de logique
- Partie 2 : 12 questions de mathématiques
- Partie 3 : 6 questions liées à un problème

L'utilisation de la calculatrice est strictement interdite pour cette épreuve.

Chaque question comporte quatre items, notés A, B, C et D. Pour chaque item, vous devez signaler s'il est vrai ou faux. Ainsi une réponse sera par exemple VFFV.

L'épreuve dure 4 heures.

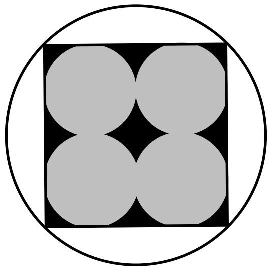
Exercices n° 1 à 6 : Logique

1) Anne, Mathilde, Sophie et Géraldine comparent leus âges. Si Anne et Sophie somment leurs âges, elles trouveront le même résultat que Mathilde et Géraldine sommant les leurs.
On sait également qu'Anne a 12 ans et que Mathilde est plus âgée d'une année que Sophie. Pour finir, le tiers de l'âge de Sophie vaut la différence entre les âges de Mathilde et de Géraldine.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A) Anne est plus vieille que Géraldine.
B) La somme des âges des quatre amies est de 45 ans.
C) La somme des âges d'Anne et de Mathilde est inférieure à celle entre les âges de Sophie et de Géraldine.
D) Sophie est la plus vieille.

2) On a le schéma suivant :



On sait que le rayon des cercles gris vaut x.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A) L'aire colorée en noir vaut $4x^2(4-\pi)$.
B) Le pourcentage d'occupation des disques est de $\dfrac{\pi}{2}$.
C) Le rayon du cercle circonscrit au carré vaut $2x\sqrt{2}$.
D) L'aire du carré est $4x^2$.

3) Nous possèdons les informations suivantes concernant les options choisies dans un lycée d'arts plastiques : histoire de l'art (H), art textile (T) et art contemporain (C).
Il y a 350 élèves dans ce lycée et on sait que :
- 110 ont choisi l'option H, 90 l'option T et 65 l'option C ;
- il y a autant d'élèves qui ont pris les trois options que d'élèves qui n'ont choisi que H ;
- ceux qui ont choisi seulement les options H et C sont au nombre de 25 ;
- 100 élèves ont choisi exactement deux options ;
- 80 élèves ont choisi les options H et T

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A) Il y a exactement 200 élèves qui n'ont pris aucune option.
B) Il y a exactement 5 élèves qui n'ont choisi que l'option H.
C) Aucun élève n'a pris l'option C seule.
D) Il y a exactement 6 élèves qui ont pris les trois options.

4) Alice vagabonde dans la forêt de l'amnésie où elle est incapable de se souvenir du jour de la semaine. Elle rencontre le lion et la licorne. Le lion ment toujours les lundi, mardi et mercredi tandis que la licorne ment toujours les jeudi, vendredi et samedi. Tous les autres jours les bêtes disent toujours la vérité.

« Hier était un jour où je mentais » dit le lion.
« Hier était un jour où je mentais » dit la licorne.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A) Le lion et la licorne disent la vérité.
B) Le jour de la semaine est dimanche.
C) Le jour de la semaine est jeudi ou dimanche.
D) Le lion ment.

5) On a quatre bouteilles de couleurs différentes : verte, bleu, rouge et jaune. Un objet se trouve dans chaque bouteille : un serpent en plastique, une plume, une bille et un stylo.
On a les informations suivantes :
- La bouteille bleue n'est pas à droite de la jaune ;
- la plume est dans la bouteille rouge ;
- il y a deux bouteilles entre la verte et la jaune ;
- le serpent en plastique est à gauche du stylo qui lui-même est à gauche de la plume.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A) La plume est tout à droite.
B) La bouteille rouge est la 3^{e} bouteille en partant de la gauche.
C) Le serpent en plastique est dans la bouteille bleue.
D) Le stylo se trouve dans la bouteille jaune.

6) On suspecte Élise, Fred et Grégoire d'avoir commis un vol.
Nous avons à leur sujet les informations suivantes :
- Si Grégoire n'est pas coupable alors Fred est coupable ;
- si Élise n'est pas coupable alors Grégoire est coupable ;
- si Grégoire est coupable alors Élise l'est aussi ;
- si Élise est coupable alors Fred ne l'est pas.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A) Grégoire est coupable.
B) Fred est coupable.
C) Élise ou Fred est coupable.
D) Élise est coupable.

Exercices n° 7 à 18 : Mathématiques

7) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

A) La dérivée de f est donnée par : $f'(x) = \dfrac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2}$.

B) Si $f'(\alpha) = 0$ alors $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

C) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

D) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$ est : $y = x+1$.

8) Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique , la probabilité pour que le correspondant soit absent est $0,4$. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est $0,2$.
Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et alors, la probabilité qu'elle soit absente est $0,3$. Et sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore $0,2$.
Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

A) La probabilité que la personne accepte de répondre lors du premier appel est $0,12$.
B) La probabilité que la personne accepte de répondre lors du second appel est $0,05$.
C) La probabilité que la personne accepte de répondre est $0,176$.
D) La probabilité que la personne ne veuille pas répondre au questionnaire est inférieure à la probabilité que la personne soit absente deux fois de suite.

9) On considère le jeu qui consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons d'un sac contenant 10 jetons donc 7 portent le numéro 1 et 3 le numéro 2.

A) La probabilité de tirer deux jetons portant des numéros différents est $\dfrac{1}{2}$.

On augmente le nombre de jetons du sac portant le numéro 2. On suppose maintenant qu'il y a un total de n jetons dans le sac.

B) La probabilité p_n de tirer 2 jetons de numéros différents est $\dfrac{14(n-7)}{n(n-1)}$.
C) La fonction $f(x) = \dfrac{14(x-7)}{x(x-1)}$ possède un maximum sur $[10; +\infty[$.
D) La probabilité maximale pour p_n est $\dfrac{7}{13}$.

10) Soit α un réel strictement positif et la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{\left|1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right|}$$

A) Sur $[-\alpha; \alpha]$, $f(x) = x + \sqrt{\left|-1 + \dfrac{x^2}{\alpha^2}\right|}$.
B) Pour $x > \alpha$, $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$.
C) f est une fonction impaire.
D) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 2\alpha$ est : $y = \left(1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3\alpha}\right)x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11) On considère le système (S) $\begin{cases} x + 2y - 9z = 1 \\ -y + \lambda z = -2 \\ -x + \lambda y + z = 7 \end{cases}$.

A) Pour $\lambda = 0$, on a une unique solution : $\left(-\dfrac{15}{2}, 2, -\dfrac{1}{2}\right)$.
B) Pour $\lambda = 2$, on a une unique solution.
C) On a unicité de la solution pour $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq -4$.
D) Si l'on fixe $z = 0$, on aura une unique solution pour tout λ.

12) Soit l'équation $x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$ avec m un paramètre réel.

A) Les valeurs de m donnant une unique solution à l'équation sont -1 et $3/5$.
B) Pour $m = 0$, l'équation a deux solutions réelles.
C) On a uniquement deux solutions pour les réels m satisfaisant $m > 3/5$.
D) Quand on a deux solutions différentes pour cette équation, elles sont nécessairement de signes opposés.

13) Soit l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation $y = \dfrac{2}{x}$ et la droite (D_m) d'équation $y = m(x+1) - 2$.

A) Les droites (D_m) passent par un point fixe pour tout m.
B) L'intersection de la droite (D_m) et de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ est un unique point simplement dans le cas où $m = -2$.
C) L'hyperbole $(\mathcal{H})$ est en dessous de la droite (D_m) pour $m = 1$ et $x \in]0; 2[$.
D) Pour $m = 0$, l'intersection de la droite (D_m) et de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ est le point $(-2; -1)$.

14) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} e^{-2x}\, dx$, $n \geq 1$.

A) La suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison e^2.
B) Le premier terme de cette suite vaut $\dfrac{e^2 - 1}{2e^2}$.
C) Le terme général u_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
D) La somme $u_1 + \cdots + u_n$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

15) Soit la fonction définie par $f(x) = \ln(3e^{2x} - e^x + 2)$.

A) L'ensemble de définition de f est $[-1; +\infty[$.
B) $f(x) = \ln 3 + 2x + \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{3} + \dfrac{2e^{-2x}}{3}\right)$.
C) La tangente en $x = 0$ à la courbe de f est : $y = \dfrac{5}{4}x + 2\ln 2$.
D) La courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = 2x + \ln 3$.

16) On considère la suite définie par récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2 \\ u_0 = 4 \end{cases}$

A) La suite $(v_n)_n$ définie par la relation $v_n = u_n - 1$ est géométrique de raison 3.
B) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n$.
C) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{n+1} + 1$.
D) $\dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{3}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 3$.

17) Soit la fonction $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. On sait que la courbe de f passe par le point $A(1; 0)$, qu'elle admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en $x = 1$ et que le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en $x = 0$ est -6.
A) $f(x) = \left(\dfrac{13}{3}x^2 + 7x + 1\right)e^{-x}$.

B) $f'(x) = \left(\dfrac{13}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x - 6\right)e^{-x}$.
C) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
D) Pour $x \geq 1,\ f(x) \geq 0$.

18) Sur les 800 derniers achats d'une voiture de marque X dans une concession, on a fait une étude sur les options prises par le client.
200 clients ont pris le kit main libre ; 320 les lecteurs DVD intégrés à l'arrière.

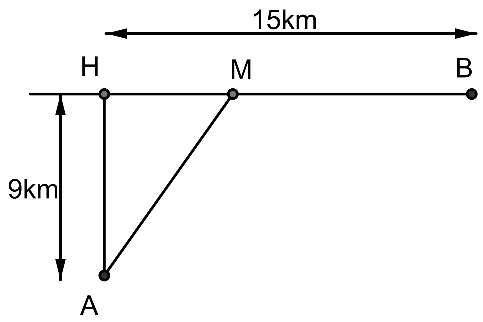
La probabilité que le client ait pris le kit main libre et les lecteurs DVD intégrés à l'arrière est de $0,2$.
On tire au hasard un client de cette étude.

A) La probabilité qu'il ait pris le kit main libre est $0,2$
B) La probabilité qu'il n'ait pris ni le kit main libre ni les lecteurs DVD est $0,55$.
C) La probabilité qu'un client ayant pris les lecteurs DVD ait également pris le kit main libre est $0,4$.
D) La probabilité qu'un client ait pris l'une ou l'autre des deux options est $0,4$.

Exercices n° 19 à 24 : Problème mathématique

Le gardien d'un phare (situé au point A) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (située au point B).
Pour cela, il doit d'abord traverser le bout de mer en canot ; sa vitesse est de $4 km/h$ (et on suppose qu'il n'y a pas de courant).
Arrivé sur terre, sa vitesse à pied est de $5 km/h$.

On notera x la distance entre le projeté orthogonal du phare sur la côte et l'endroit où le gardien doit accoster.
Sur la figure $HM = x$:



19) On s'intéresse dans un premier temps au temps passé par le gardien sur mer et sur terre.

A) Le temps passé en mer est $4\sqrt{x^2+9}$ h.
B) Le temps passé sur terre est $3 - \dfrac{x}{5}$ h.
C) Si le gardien accoste au point H alors il mettra au total $5h15$ pour rejoindre sa maison.
D) Si le gardien accoste directement devant sa maison, il aura mis $4h30$.

20) Le gardien devant faire au plus vite, il lui faudra trouver le temps minimum pour réaliser ce parcours.

A) Le problème revient à minimiser sur $[0; 15]$ $f(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+81} + \dfrac{1}{5}(15-x)$.
B) $f'(x) = \dfrac{5x + 4\sqrt{x^2+81}}{20\sqrt{x^2+81}}$.
C) Le minimum de f est atteint en $x = 12$.
D) Le parcours minimum pour le gardien est de $4h12$.