

Fiche-méthodes 1 :

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Le but de la méthode est de décomposer une fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$ (où P et Q sont des polynômes premiers entre eux) en une somme de fractions rationnelles « plus simples » .

On peut présenter deux méthodes classiques pour y arriver.

On réduit tous les termes au même dénominateur.

On réduit au même dénominateur tous les termes de la partie fractionnaire de f , et on identifie avec la fraction initiale.

L'énoncé nous proposera la décomposition attendue (ou en tous les cas sa forme).

Exemple : Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2(x+2)}$; il nous faut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.

Solution : On part de la forme proposée et on réduit tout au même dénominateur :

$$\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} = \frac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + (2a-2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$$

et on l'identifie à la forme initiale de f , ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-2c=0 \\ 2a-2b+c=1 \end{cases} .$$

On trouve alors : $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = \frac{5}{9}$, d'où la décomposition de f :

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2/3}{(x-1)^2} + \frac{4/9}{x-1} + \frac{5/9}{x+2} .$$

Remarque : cette méthode donne souvent lieu à des calculs assez lourds ; il est conseillé, chaque fois que cela est possible, de l'éviter.

On calcule les coefficients de la décomposition en les isolant.

Pour isoler le coefficient α se trouvant dans la fraction $\frac{\alpha}{x-a}$ d'une décomposition en éléments simples, on pensera à multiplier toute la relation par $x-a$ puis à prendre $x=a$. On répète l'opération pour chacun des coefficients à déterminer.

Exemple 1 : Soit à décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+3)}$ pour $x \neq 2$ et $x \neq -3$; il nous faut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}.$$

Solution : On a les valeurs : $a = (x-2)f(x)\Big|_{x=2} = \frac{x}{x+3}\Big|_{x=2} = \frac{2}{5}$,

et $b = (x+3)f(x)\Big|_{x=-3} = \frac{x}{x-2}\Big|_{x=-3} = \frac{3}{5}$.

D'où la décomposition :

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{2/5}{x-2} + \frac{3/5}{x+3}.$$

Exemple 2 : La tâche peut s'avérer plus délicate s'il on a dans la décomposition un terme avec un carré.

Prenons l'exemple $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

Solution : On a les valeurs : $c = (x+1)f(x)\Big|_{x=-1} = \frac{x+2}{(x-1)^2}\Big|_{x=-1} = \frac{1}{4}$,

et $a = (x-1)^2 f(x)\Big|_{x=1} = \frac{x+2}{x+1}\Big|_{x=1} = \frac{3}{2}$.

Le problème se présente au moment où nous voulons calculer b car on ne peut multiplier la relation par $x-1$ puis prendre $x=1$ (à cause du terme en $\frac{1}{(x-1)^2}$).

On contourne ce problème en multipliant toute la relation par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$, il vient : $0 = 0 + b + \frac{1}{4}$ d'où $b = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, on a la décomposition :

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1}.$$

Fiche-méthodes 2 :

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Comment montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E ?

- On revient à la définition.

Soit E un espace vectoriel réel et $F \subset E$; F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si :

- $0_E \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in F^2, \alpha x + y \in F$.

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donnée ; montrer que F est un espace vectoriel.

Solution : Tout d'abord on note que $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est notre espace vectoriel E).

Vérifions les axiomes :

- Ici $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ représente la matrice nulle, on a évidemment $A \times 0 = 0 \times A = 0$ donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in F$.

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$, voyons si $\alpha M + N \in F$.

$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN \underset{M, N \in F}{=} \alpha MA + NA = (\alpha M + N)A$, ainsi $\alpha M + N \in F$.

En conclusion, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (et donc F est lui-même un espace vectoriel).

- On écrit, quand cela est possible, l'ensemble F à l'aide d'un Vect.

Soit $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E .

On rappelle que $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de v_1, \dots, v_n . On sait que F est un sous-espace vectoriel de E , appelé le sous-espace vectoriel engendré par S (S est donc une famille génératrice de F).

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0, 2x - y + z = 0\}.$$

Noter que : $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 3y \end{cases}$; montrer que F est un espace vectoriel.

Solution : On a $v = (x, y, z) \in F \iff$ il existe un réel y tel que :
 $v = (x, y, z) \in F \iff v = (-y, y, 3y) = y(-1, 1, 3)$, d'où :
 $F = Vect\{(-1, 1, 3)\}$.

On peut donc conclure que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 (et donc c'est un espace vectoriel).

Remarque : on peut même conclure que $((-1, 1, 3))$ est une base de F et $\dim F = 1$.

• **On peut essayer de montrer que F est le noyau ou l'image d'une application linéaire.**

Exemple : Soit l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 4y + z = 0\}$; montrer que F est un espace vectoriel.

Solution : On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = 3x - 4y + z.$$

Alors, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 4y + z = 0\} = Ker f$; d'où : F est un espace vectoriel.

Comment montrer que F n'est pas un sev de E ?

| On peut soit montrer que $0_E \notin F$, ou si $0_E \in F$ montrer que F n'est pas stable soit pour la multiplication externe soit pour l'addition.

Exemple 1 : Pour l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$, on peut remarquer que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ n'appartient pas à F car $0 + 0 = 0 \neq 1$.

Donc, F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Exemple 2 : Soit l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$.

$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$; on ne peut rien dire pour le moment.

Considérons : $v_1 = (1, 0) \in F$ et $v_2 = (0, 1) \in F$.

On a $v_1 + v_2 = (1, 1) \notin F$.

La stabilité pour la loi $+$ n'étant pas assurée, F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Comment montrer que deux sev de dimension finie sont égaux ?

| Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux, il suffit de montrer par exemple : $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$.

Exemple : Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs : $v_1 = (2, 3, -1)$,

$v_2 = (1, -1, -2)$, $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrons que : $Vect(v_1, v_2) = Vect(w_1, w_2)$.

Solution : On note $F = Vect(v_1, v_2)$ et $G = Vect(w_1, w_2)$.

Clairement, par non colinéarité de v_1 et v_2 et aussi de w_1 et w_2 , on a $\dim F = \dim G = 2$.

Il nous reste à montrer une inclusion ; par exemple, pour montrer que $F \subset G$, il nous suffit de vérifier que v_1 et v_2 sont dans G .

On trouve facilement que $v_1 = \frac{3}{7}w_1 + \frac{1}{7}w_2$ (on a raisonné à l'aide des coordonnées nulles dans w_1 et w_2).

De même, on a $v_2 = -\frac{1}{7}w_1 + \frac{2}{7}w_2$.

Dès lors, $F \subset G$ et donc, avec $\dim F = \dim G$, on a $F = G$.

Comment montrer qu'un sev F de E est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$?

• **On utilise la définition.**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E . F est dit stable par f si $f(F) \subset F$.

Autrement dit, F est stable par $f \iff \forall x \in F, f(x) \in F$.

Remarque : si F est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, la restriction de f à F , notée $f|_F$ induit un endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F, f|_F(x) = f(x)$.

Exemple : En notant E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ , montrons que E_λ est stable par f .

Solution : En effet, pour $x \in E_\lambda$ on $f(x) = \lambda x$.

Il nous faut vérifier que $f(x) \in E_\lambda$ c'est-à-dire $f(f(x)) = \lambda f(x)$ ce qui est immédiat en composant la relation $f(x) = \lambda x$ par f .

Ainsi tout E_λ est stable par f .

• **On utilise une famille génératrice de F .**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et (v_1, \dots, v_p) une famille génératrice de F . Pour montrer que $F = Vect(v_1, \dots, v_p)$ est stable par f , on vérifie que : $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(v_i) \in F$.

Exemple : On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$.

Montrons que F est stable par f .

Solution : Pour cela, il nous suffit de vérifier que $f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont dans F ; on procède matriciellement :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } f(v_1) = v_1 \in F.$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } f(v_2) = v_1 + v_2 \in F.$$

En conclusion, F est stable par f .

Comment montrer que 2 sev sont en somme directe ?

Soit E un ev et F, G deux sev de E .

F et G sont en somme directe si : $F \cap G = \{0\}$.

Remarques : • Lorsque F et G sont en somme directe, cette somme $F+G$ est notée $F \oplus G$.

Alors, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in G$.

• Si E est de dimension finie, alors $F \cap G = \{0\} \iff \dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Exemple : Dans \mathbb{R}^4 , on considère la famille $S = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 2, 2)$, $v_2 = (-1, 2, -1, 3)$ et $v_3 = (1, 2, 3, 0)$.

On note $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1, 1)$.

Montrer que F et G sont en somme directe.

Solution : Soit $v \in F \cap G$ et donc $v \in F$ et $v \in G$.

Or, $v \in G \iff \exists t \in \mathbb{R}, v = (t, t, t, t)$; $v \in F \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$.

D'où $v = (\alpha - \beta + \gamma, 2\beta + 2\gamma, 2\alpha - \beta + 3\gamma, 2\alpha + 3\beta) = (t, t, t, t)$

$$\text{ce qui équivaut à : } \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = t \\ 2\beta + 2\gamma = t \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = t \\ 2\alpha + 3\beta = t \end{cases} \iff \begin{matrix} \alpha = \beta = \gamma = t = 0. \\ \text{après calculs} \end{matrix}$$

Ainsi, $v = (0, 0, 0, 0)$ et $F \cap G = \{0\}$ et donc la somme $F + G$ est directe.

Comment montrer que 2 sev sont supplémentaires dans E ?

• On utilise la définition.

Pour un ev E (de dimension finie ou infinie), on utilise :

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E, \exists! y \in F, \exists! z \in G, x = y + z.$$

Pour cela, on utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

Exemple : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $G = \{g \text{ paire}\}$ et $H = \{h \text{ impaire}\}$.

Montrer que G et H sont des sev de E supplémentaires.

Solution : Il est clair tout d'abord que G et H sont des sev de E .

Analyse : Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe un couple (g, h) dans $G \times H$, $f(x) = g(x) + h(x)$ (1).

Comme on connaît les parties, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ (2).

Avec (1) et (2) on a $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Synthèse : Il nous reste à vérifier que g est paire et h est impaire, ce qui est immédiat.

En résumé, on vient de montrer que toute application f de E s'écrit de manière unique : $f = g + h$, $g \in G$, $h \in H$ où g et h sont définies comme ci-dessus.

En conclusion, $E = G \oplus H$.

• **On utilise la caractérisation avec des bases.**

Dans le cas où E est de dimension finie, on a (en notant \mathcal{B}_1 une base de F , \mathcal{B}_2 une base de G) :

$$E = F \oplus G \iff \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ est une base de } E.$$

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -y = z\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$.

Montrer que F et G sont des sev de \mathbb{R}^3 supplémentaires.

Facilement, $F = Vect(v_1)$ avec $v_1 = (1, -1, 1)$; $G = Vect(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

On vérifie aisément que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 (libre et cardinal de la famille = dimension de \mathbb{R}^3).

En conclusion, on a $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Fiche-méthodes 3 :

Familles libres ou liées - Bases

Comment montrer que la famille $S = (v_1, \dots, v_k)$ est libre ?

Soit $S = (v_1, \dots, v_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- Dans le cas général, on revient à la définition.

Celle-ci nous précise que si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle alors nécessairement tous les coefficients sont nuls, soit :

$$\sum_{i=1}^k \lambda v_i = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

Deux cas particuliers :

- ★ Si la famille ne contient qu'un seul vecteur v , on utilise la propriété : (v) est libre $\iff v \neq 0_E$.
- ★ Si la famille contient deux vecteurs u et v , on utilise la propriété : (u, v) libre $\iff u$ et v ne sont pas proportionnels.

Remarque : noter que pour qu'une famille de plus de trois vecteurs soit libre, il ne suffit pas que les vecteurs soient 2 à 2 non colinéaires.

Exemple : Soit $S = (v_1 = (5, 2, -11), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 6))$.

Vérifier que S est libre.

Solution : On a : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -11\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = 3\lambda_1 \\ -11\lambda_1 - 4\lambda_1 + 18\lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi, la famille S est libre.

- On peut aussi déterminer le rang de S .

En calculant le rang de S , on utilise l'équivalence :
 S est libre $\iff \text{rg}(S) = k$.