# Chapitre 1

# Nombres complexes et fonctions holomorphes

Les deux premières parties de ce chapitre sont constituées de rappels sur les nombres complexes et la convergence, et elles ne contiennent pratiquement aucune démonstration. Elles sont destinées également à fixer les notations. La dernière est une introduction aux objets d'étude de l'analyse complexe : ce sont les fonctions holomorphes, c'est-à-dire dérivables au sens complexe. Nous n'exposons dans ce premier chapitre que leurs propriétés élémentaires, laissant même de côté les équations de Cauchy-Riemann qui seront présentées dans le chapitre 13 consacré aux fonctions harmoniques.

## 1.1 Les nombres complexes

On utilise les notations suivantes dans l'ouvrage entier : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers, $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si $\mathbb{E}$ désigne l'un de ces ensembles, on pose également $\mathbb{E}^* = \mathbb{E} \setminus \{0\}$.

**Définition 1.1** *L'ensemble des* ***nombres complexes*** *est l'ensemble* $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ *muni des deux opérations définies par*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

On utilisera généralement les symboles $z, w, \zeta, a, b \ldots$ pour désigner les nombres complexes.

La vérification des affirmations de la proposition suivante est immédiate.

**Proposition 1.2** *L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des deux opérations ci-dessus est un corps. Plus précisément, on a pour tous $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :*

*(1)* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ;

*(2)* $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ ;

*(3)* $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ ;

*(4) le nombre* $(0, 0)$ *est l'élément neutre pour l'addition, et tout nombre complexe* $z = (x, y)$ *admet* $-z = (-x, -y)$ *comme inverse additif ;*

*(5) le nombre complexe* $(1, 0)$ *est l'élément neutre pour la multiplication et tout nombre complexe non nul* $z = (x, y)$ *admet l'inverse multiplicatif suivant :*

$$z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

**Écriture allégée** L'ensemble des nombres complexes de la forme $(x, 0)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui est isomorphe $\mathbb{R}$. C'est pourquoi désormais *on identifie* $\mathbb{R}$ *au sous-corps* $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *de* $\mathbb{C}$ *par l'isomorphisme* $x \mapsto (x, 0)$. En particulier, $(0, 0)$ sera noté 0 et $(1, 0)$ sera noté 1. Enfin, on pose $i = (0, 1)$. Alors $i^2 = -1$ et tout nombre complexe $z$ s'écrit de manière unique $z = x + iy = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ la ***partie réelle***, resp. la ***partie imaginaire*** de $z$.

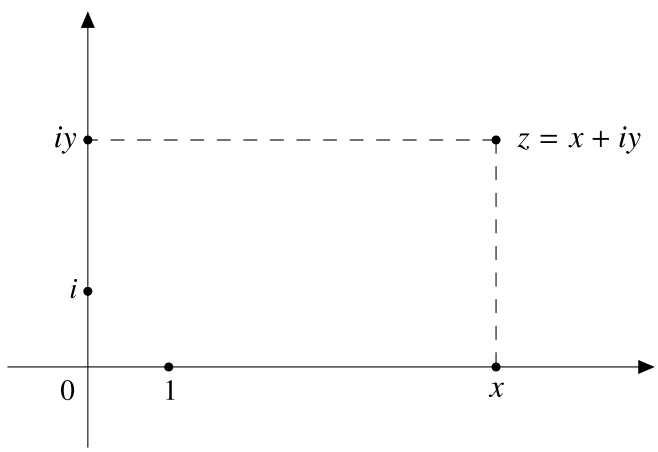


FIGURE 1.1 – Représentation graphique des nombres complexes

**Représentation graphique** De même que l'ensemble des nombres réels est représenté par une droite orientée, l'ensemble des nombres complexes admet une représentation graphique naturelle dans le plan muni de deux axes perpendiculaires et où le nombre $z = x + iy$ est représenté par le point $(x, y)$.

Nous introduisons également les notions importantes de conjugué et de module d'un nombre complexe : géométriquement, le conjugué de $z$ est le symétrique de $z$ par rapport à l'axe réel, et son module est la distance de $z$ à l'origine 0.

**Définition 1.3** *Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ ses parties réelle et imaginaire.*

*(1) Le **conjugué** de $z$ est le nombre : $\bar{z} = x - iy$.*

*(2) Le **module** de $z$ est le nombre réel positif ou nul : $|z| = (z\bar{z})^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

**Proposition 1.4** *Pour $z, w, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, on a :*

*(1)* $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$ *;*

*(2)* $|zw| = |z||w|$ *;*

*(3)* $|z + w| \le |z| + |w|$ *;*

*(4)* $||z| - |w|| \le |z - w|$ *;*

*(5)* $|z_1 - z_3| \le |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$ *;*

*(6) si $z \neq 0$, alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Preuve. Les vérifications sont immédiates et laissées en exercice. □

**Application** L'équation du second degré $z^2 = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) admet les solutions $z = x + iy$ suivantes (exercice) :

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

avec la condition supplémentaire

$$\text{signe de } xy = \text{signe de } b.$$

Plus généralement, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ sont donnés et si $\alpha \neq 0$, alors l'équation

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

admet les solutions

$$z_\pm = \frac{-\beta \pm \rho}{2\alpha}$$

où $\rho$ est une des racines carrées de $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire une des solutions de l'équation $\rho^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

**Coordonnées polaires** de $z \neq 0$. En nous appuyant sur la représentation graphique des nombres complexes, on peut écrire $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r = |z|$ et $\theta$ est l'angle entre la partie positive de l'axe réel et la demi-droite issue de 0 et passant par le point $z$.

On dit que $\theta$ est l'***argument*** de $z$, et on le note $\theta = \arg(z)$. Il est déterminé seulement à un multiple entier de $2\pi$ près.

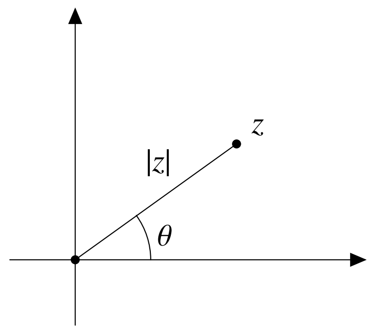


FIGURE 1.2 – Coordonnées polaires de $z$

On a

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

si $z_j = r_j(\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j))$ grâce aux formules trigonométriques. En particulier,

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $z \neq 0$.

Si $w \neq 0$ est donné et si $n > 0$ est un entier, l'équation $z^n = w$ admet $n$ solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ ; si $w = s(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, alors les solutions de l'équation sont

$$z_k = \sqrt[n]{s} \left[ \cos\left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin\left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

pour $0 \leq k \leq n - 1$.

On introduira dans le cours la fonction exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ qui prolonge la fonction exponentielle réelle $x \mapsto e^x$. On démontrera que $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, et que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y).$$

Cela permet d'exprimer $z$ sous la forme $z = |z| e^{i \arg(z)}$.

**Exemple** Résolvons l'équation $z^4 + 16 = 0$. D'après ce qui précède, on la réécrit ainsi :

$$z^4 = -16 = 2^4 e^{i\pi}.$$

Les quatre solutions sont

$$z_k = 2e^{i(\pi/4+k\pi/2)} \quad (0 \le k \le 3)$$

c'est-à-dire

$$z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},\ z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

## 1.2 Rappels topologiques

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace métrique complet pour la distance $d(z,w) = |z-w|$. En effet, cette dernière correspond exactement à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, toute ***suite de Cauchy*** converge : si $(z_n) \subset \mathbb{C}$ est telle que, pout tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $|z_n - z_m| \le \epsilon$ dès que $m, n \ge N$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, c'est-à-dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $|z_n - z| < \epsilon$ pour tout $n \ge N$.

### 1.2.1 Disques et ouverts connexes

(1) Le ***disque ouvert*** de centre $a$ et de rayon $r$ est $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ ;

(2) Le ***disque fermé*** de centre $a$ et de rayon $r$ est $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \le r\}$ ;

(3) Le ***disque pointé*** de centre $a$ et de rayon $r$ est $D'(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$.

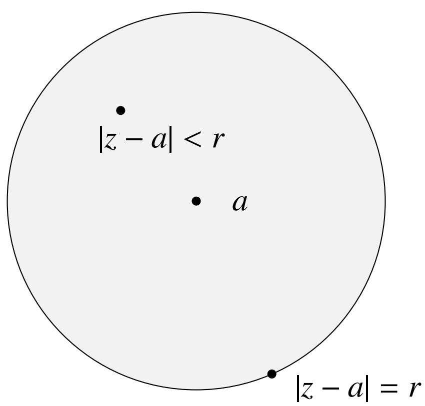


FIGURE 1.3 – Disque de centre $a$ et de rayon $r$

Les ouverts de $\mathbb{C}$ sont les réunions quelconques de disques ouverts. On les notera la plupart du temps $\Omega$, $U$, $V$, etc. Les compacts de $\mathbb{C}$ sont les parties fermées et bornées. On notera $\overline{A}$ l'adhérence de la partie $A$ de $\mathbb{C}$ ; le contexte permettra de faire clairement la distinction avec le conjugué.

Rappelons que $U \subset \mathbb{C}$ est ***connexe*** si $U$ ne peut pas s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides et disjoints. De manière équivalente, $U$ est connexe si et seulement si la seule partie non vide $A$ de $U$ qui est ouverte et fermée dans $U$ est égale à $U$.

Un ouvert connexe est parfois appelé un ***domaine*** de $\mathbb{C}$.

On va voir une propriété utile des domaines de $\mathbb{C}$. Pour cela, on introduit d'abord la notion de segment dans $\mathbb{C}$ : soient $a$ et $b$ deux nombres complexes ; on note $[a; b]$ l'ensemble des nombres de la forme $a + t(b - a)$ avec $t \in [0, 1]$. C'est le ***segment*** (orienté) d'origine $a$ et d'extrémité $b$. Par extension, on appelle ***ligne brisée*** une réunion finie de segments de la forme : $\ell = \bigcup_{j=1}^{n}[z_j; z_{j+1}]$. On rappelle le résultat suivant qui servira plus loin.

**Proposition 1.5** *Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Alors $U$ est connexe si et seulement si pour tous $a, b \in U$, il existe une ligne brisée $\ell$ de $a$ vers $b$ telle que $\ell \subset U$. (C'est-à-dire que $\ell = [z_1; z_2] \cup \cdots \cup [z_n; z_{n+1}]$ avec $z_1 = a$ et $z_{n+1} = b$, cf. figure 1.4.)*

Preuve. Fixons un point quelconque $a \in U$ et définissons l'ensemble $A$ de tous les points $b$ de $U$ pour lesquels il existe une ligne brisée $\ell \subset U$ qui relie $a$ à $b$. Alors on montre facilement que $A$ est non vide ($a \in A$) et qu'il est à la fois ouvert et fermé dans $U$. La connexité de $U$ implique que $A = U$. $\square$

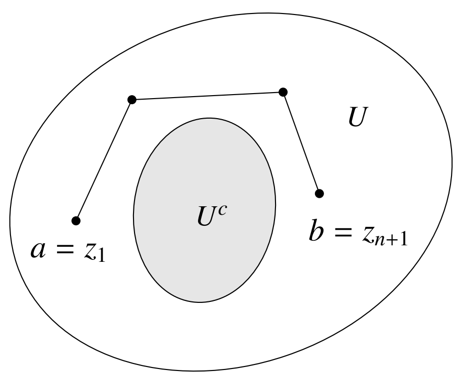


Figure 1.4 – Ouvert connexe et ligne brisée

### 1.2.2 Convergences uniforme, absolue, normale

Si $X$ est un ensemble, soient $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n > 0$, et $f : X \to \mathbb{C}$. On dit que la suite $(f_n)$ ***converge uniformément*** vers $f$ sur $X$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad (n \geq N).$$

Le résultat suivant sera utilisé souvent, sans nécessairement y faire référence explicitement.

**Proposition 1.6** *(a) Soit $X$ un espace topologique et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $X$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et qui converge uniformément sur $X$ vers $f$. Alors $f$ est continue. Si $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors, de plus,*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

*(b) Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et soient $f, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, des fonctions définies sur $\Omega$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) la suite $(f_n)$ converge vers $f$ uniformément sur tout compact de $\Omega$ ;*

*(2) pour tout $a \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, $f_n \to f$ uniformément sur $\overline{D}(a,r)$.*

Preuve. (a) La continuité de $f$ est standard et on a $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f|$.
(b) Il est évident que (2) est un cas particulier de (1). Il suffit de montrer que (2) implique (1). Soit alors $K \subset \Omega$ un compact. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$2\delta = \inf\{|z-w| : z \in K, w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}.$$

Par suite, pour tout $a \in K$, on a $\overline{D}(a,\delta) \subset \Omega$.

De plus, le compact $K$ étant contenu dans la réunion des disques $\bigcup_{a\in K} D(a,\delta)$, il existe $a_1, \ldots, a_m \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m D(a_j,\delta) \subset \bigcup_{j=1}^m \overline{D}(a_j,\delta).$$

Puisque $f_n \to f$ uniformément sur chaque disque fermé $\overline{D}(a_j,\delta)$, il s'ensuit que $f_n \to f$ uniformément sur $K$. □

Une série numérique $\sum_n a_n$ ***converge absolument*** si $\sum_n |a_n|$ converge. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur $X$, la série $\sum_{n=0}^\infty f_n$ ***converge normalement*** sur $X$ s'il existe $(c_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $|f_n(x)| \leq c_n$ pour tout $x \in X$ et tout $n$, et si $\sum_n c_n < \infty$. Si une série converge normalement alors elle converge uniformément. Par exemple, la série géométrique $\sum_{n=0}^\infty z^n$ converge normalement dans tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$ avec $0 < r < 1$.

**Exemple** On rappelle que si $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ est une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: L < 1$$

alors la série $\sum_n a_n$ converge absolument.

(En effet, choisissons $\rho$ tel que $L < \rho < 1$ ; il existe $N$ tel que $|a_{n+1}| \leq \rho |a_n|$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, $|a_{N+n}| \leq |a_N| \rho^n$ pour tout $n \geq 0$ et cela implique que $\sum_n |a_n|$ converge puisqu'elle est majorée par (une constante fois) une série géométrique.)

Montrons alors que, pour tout $a > 0$, la série

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^a z^n$$

converge normalement dans tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ où $0 < r < 1$ : on a en effet $|n^a z^n| \leq n^a r^n$ pour tout $|z| \leq r$ et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^a r^{n+1}}{n^a r^n} = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^a r = r < 1.$$

## 1.3 Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

Dans toute la suite, $\Omega$ désignera toujours un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On précisera s'il possède d'autres propriétés (connexité, ...). La première définition est un rappel.

**Définition 1.7** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. On dit que $f$ est* ***continue en*** *$z_0$ si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

*On dit que $f$ est* ***continue*** *dans $\Omega$ si $f$ est continue en tout point de $\Omega$.*

Nous donnons à présent la définition des objets d'étude de tout l'ouvrage. Nous verrons qu'il ne s'agit pas d'une simple généralisation du cas des fonctions d'une variable réelle et que la condition ci-dessous implique des propriétés extrêmement régulières.

**Définition 1.8** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. On dit que $f$ est* ***$\mathbb{C}$-dérivable*** *en $z_0$ si la limite suivante existe :*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0).$$

*Si $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\Omega$, on dit qu'elle est* ***holomorphe*** *dans $\Omega$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\Omega$. Si $f$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, on dit qu'elle est* ***entière****.*