

Table des matières

1	Nombres complexes et fonctions holomorphes	1
1.1	Les nombres complexes	1
1.2	Rappels topologiques	5
1.2.1	Disques et ouverts connexes	5
1.2.2	Convergences uniforme, absolue, normale	6
1.3	Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes	8
1.4	Exercices du chapitre 1	11
2	Les séries de puissances	15
2.1	Rayon et disque de convergence	15
2.2	Le produit de Cauchy de deux séries*	20
2.3	La fonction exponentielle*	23
2.4	Exercices du chapitre 2	24
3	Intégrales curvilignes dans \mathbb{C}	27
3.1	Chemins, lacets et intégrales	27
3.2	Primitives de fonctions holomorphes	33
3.3	Exercices du chapitre 3	38
4	La théorie de Cauchy	41
4.1	L'indice d'un point par rapport à un lacet	41
4.2	Le théorème de Cauchy local	44
4.3	Le théorème de Cauchy global	52
4.4	Exercices du chapitre 4	55
5	Zéros et singularités isolées	59
5.1	Les zéros des fonctions holomorphes	59
5.2	Les séries de Laurent	61
5.3	Classification des points singuliers isolés	66
5.4	Exercices du chapitre 5	73

6	Le théorème des résidus	77
6.1	Le résidu en un pôle	77
6.2	Calculs pratiques des résidus	78
6.3	Applications au calcul d'intégrales	80
6.4	Une application aux séries	85
6.5	Exercices du chapitre 6	88
7	Les logarithmes complexes	91
7.1	Logarithmes et déterminations	91
7.2	Trois applications	95
7.3	Exercices du chapitre 7	100
8	Principe du maximum et théorème de Rouché	101
8.1	Le principe du maximum	101
8.2	Le théorème de Rouché	104
8.3	Exercices du chapitre 8	108
9	La sphère de Riemann	111
9.1	La projection stéréographique	111
9.2	Singularités à l'infini	114
9.3	Les transformations de Möbius	117
9.4	Exercices du chapitre 9	121
10	Connexité simple et théorème de Riemann	123
10.1	Version homotopique du théorème de Cauchy	123
10.2	Le théorème de représentation conforme	127
10.3	Le théorème de Runge	133
10.4	Le théorème de Mittag-Leffler	142
10.5	Exercices du chapitre 10	144
11	Produits infinis et la fonction Gamma	147
11.1	Produits infinis et le théorème de Weierstrass	147
11.2	La fonction Gamma	159
11.3	Exercices du chapitre 11	165
12	La fonction zêta et les nombres premiers	167
12.1	La fonction zêta de Riemann	167
12.2	Le théorème des nombres premiers	178
12.3	Exercices du chapitre 12	189

13 Équations de Cauchy-Riemann et applications	191
13.1 Comparaison avec la différentiabilité au sens réel	191
13.2 Les fonctions harmoniques	193
13.2.1 Le problème de Dirichlet pour le disque unité	195
13.2.2 Intégrales de Cauchy et de Poisson, représentations en séries	202
13.3 Applications conformes	203
13.4 Exercices du chapitre 13	206
14 Solutions à une sélection d'exercices	209
14.1 Exercices du chapitre 1	209
14.2 Exercices du chapitre 2	211
14.3 Exercices du chapitre 3	213
14.4 Exercices du chapitre 4	217
14.5 Exercices du chapitre 5	223
14.6 Exercices du chapitre 6	227
14.7 Exercices du chapitre 7	232
14.8 Exercices du chapitre 8	234
14.9 Exercices du chapitre 9	237
14.10 Exercices du chapitre 10	238
14.11 Exercices du chapitre 11	240
14.12 Exercices du chapitre 12	243
14.13 Exercices du chapitre 13	244
Bibliographie	247
Index	249