- Dans le problème λ désigne toujours une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne toujours une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définie en I.A, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

I - Préliminaires, définition de la transformation L

I.A – Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}dt$.

I.B – Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C – Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

II - Exemples dans le cas de f positive

II.A – Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B – Dans les trois cas suivants, déterminer E.

1) $f(t) = \lambda'(t)$, avec λ supposée de classe $\mathcal{C}^1$.

2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

3) $f(t) = \dfrac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C – Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

2) Prouver que Lf est dérivable.

3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait $Lf(x) - (Lf)'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$.

4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geqslant 0$.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

5) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

III - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

III.A – Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
On note encore f le prolongement obtenu.

III.B – Déterminer E.

III.C – À l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a $Lf(x) = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

III.D – Est-ce que $Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

IV - Généralités dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A – Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$), alors Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B – Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C – Comportement en l'infini
On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant : $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\, t^t + O(t^{n+1})$.

1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\, t^t \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2}).$$

2) En déduire que lorsque x tend vers l'infini, on a le développement asymptotique : $Lf(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$.

IV.D – Comportement en o

On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers ℓ en 0^+.

V - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A – Montrer que E ne contient pas 0.

V.B – Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C – Montrer que E' contient 0.

V.D – Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E – En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F – On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-xt} dt$. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G – Que vaut $Lf(0)$?

VI - Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A – Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$.

1) Que dire de $\displaystyle\int_0^1 P(t) g(t)\, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B – Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$.
On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$ pour tout $t \geqslant 0$.

1) Montrer que $Lf(x+a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\, dt$.

2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^n h\Big(-\frac{\ln(u)}{a}\Big) du$ converge et qu'elle est nulle.

3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C – Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

VII - Étude en la borne inférieure de E

VII.A – Cas positif
On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B – Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

1) Déterminer E.

2) Déterminer E'.

3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E et la déterminer.

VIII - Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients complexes et on utilise la transformation L appliquée à des éléments de P pour l'étude d'un opérateur U.

VIII.A – Soient P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{P}(t)Q(t)e^{-t}dt$ où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P, converge.

VIII.B – On note pour tout couple $(P,Q)\in\mathcal{P}^2$,

$$\big(P|Q\big)=\int_0^{+\infty}\overline{P}(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

Vérifier que $\big(\cdot|\cdot\big)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

VIII.C – On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par $U(P)(t)=e^tD\big(te^{-t}P'(t)\big)$.
Vérifier que U est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

VIII.D – Montrer que pour tous P et Q de $\mathcal{P}$, on a

$$\big(U(P)|Q\big)=\big(P|U(Q)\big).$$

VIII.E – Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F – Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

2) Quel lien y a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G – Description des éléments propres de U

On considère sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n):\quad tP''+(1-t)P'+nP=0$$

avec $n\in\mathbb{N}$ et d'inconnue $P\in\mathcal{P}$.

1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t)=t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0,+\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1,+\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1,+\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n\in\mathbb{N}$ par $P_n(t)=e^tD^n(e^{-t}t^n)$?

Solution

Partie I

A - Comme l'absolue convergence entraîne la convergence on a $E \subset E'$.

B - Si $x_0 \in E$ et $x \geqslant x_0$, comme $\forall t \geqslant 0$, $\left|f(t)e^{-xt}\right| \leqslant \left|f(t)e^{-x_0 t}\right|$, on a $x \in E$ et donc $[x_0, +\infty[\subset E$, ce qui prouve que E est un intervalle non majoré.

C - Soit $\varphi : (x,t) \mapsto f(t)e^{-xt}$, alors φ est continue sur $E \times \mathbb{R}_+$ et, si pour tout $[a,b] \subset E$, $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+ \Rightarrow \left|\varphi(x,t)\right| \leqslant \left|\varphi(a,t)\right|$ avec $t \mapsto \left|\varphi(a,t)\right|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a \in E$. Donc, en tant qu'intégrale paramétrée et par domination locale, Lf est continue sur E.

Partie II

A - Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a $E = E'$.

B -

1) Si x et $T > 0$ on a $\displaystyle\int_0^T \lambda'(t)e^{-x\lambda(t)}dt = e^{-x\lambda(0)} - e^{-x\lambda(T)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} e^{-x\lambda(0)}$ car λ est croissante non majorée par hypothèse. De plus ici $\lambda' \geqslant 0$ et donc, d'après II.A. on a $\mathbb{R}_+^\star \subset E = E'$.

De même $\displaystyle\int_0^T \lambda'(t)\,dt = \lambda(T) - \lambda(0) \xrightarrow[T\to+\infty]{} +\infty$ donc $0 \notin E$ et, par I.B. on en déduit $E = \mathbb{R}_+^\star$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{(t-x)\lambda(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et, donc, $E = \varnothing$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(t)e^{-x\lambda(t)} \underset{t\to+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{1+t^2}\Big)$ et, comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $E = \mathbb{R}$.

C -

1) Déjà $0 \in E$ et, si $x < 0$, $f(t)e^{-x\lambda(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $x \notin E$. Par suite $E = \mathbb{R}_+$. Immédiatement $Lf(0) = \lim\limits_{+\infty} \arctan - \arctan(0) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

2) La question est bien mal posée. On va montrer en fait que Lf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et la question suivante montrera que Lf n'est pas dérivable en 0.

Soit $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et la question de l'existence de $Lf(x)$ pour $x > 0$ a déjà été traitée.

Si $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+$ on a $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = t^2 \varphi(x,t) \leqslant e^{-at^2}$ avec $t \mapsto e^{-at^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc, en tant qu'intégrale paramétrée et par domination locale, Lf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec, si $x > 0$:

$$(Lf)'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2}\,dt\cdot$$

3) Si $x > 0$, $\big[Lf - (Lf)'\big](x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$ d'après l'expression précédente de $(Lf)'$ et le changement de variable linéaire $u = t\sqrt{x}$ donne :
$\big[Lf - (Lf)'\big](x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$ où $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du > 0$ car $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue et strictement positive.
Quand $x \to 0^+$, par continuité de Lf en 0 on en déduit que $(Lf)'(x) \to -\infty$ et le théorème des accroissements finis montre que $\dfrac{Lf(x) - Lf(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, ce qui prouve la non dérivabilité de Lf en 0 pour finir de répondre à la question précédente.

4) g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $g'(x) = -\dfrac{Ae^{-x}}{\sqrt{x}}$ si $x > 0$ d'où, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^x g'(t)\,dt = \dfrac{\pi}{2} - A\int_0^x \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt.$

5) Si $x > 0$ le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,x]$ sur $\big]0,\sqrt{x}\,\big]$ et montre que $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2A\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,du \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2} - 2A^2$.
Or, par décroissance, $0 \leqslant Lf(x) \leqslant Lf(0)$ d'où $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ et, donc, $A^2 = \dfrac{\pi}{4}$ puis, comme $A > 0$, $A = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Partie III

A - $\dfrac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$ et donc $f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. En posant $f(0) = 0$ on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

B - $f(t)e^{-tx} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{te^{-tx}}{2}$ et donc $E = \mathbb{R}_+^\star$ car si $x = 0$ alors $\dfrac{t}{2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ et, si $x > 0$, $\dfrac{te^{-tx}}{2} \underset{t \to +\infty}{=} o(t^{-2})$.

C - Si $t > 0$, $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} - 1 + \dfrac{t}{2} = -1 + \dfrac{t}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} te^{-nt}.$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $f_n : t \mapsto te^{-(n+x)t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $n+x>0$, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sa somme est continue sur cet intervalle.
Si $T>0$, en intégrant par parties
$$\int_0^T |f_n(t)|dt = \Big[\frac{te^{-(n+x)t}}{-(n+x)}\Big]_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{n+x}\int_0^T e^{-(n+x)t}dt \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{(n+x)^2}$$
terme général d'une série convergente.
Le théorème d'intégration terme à terme montre que :
$$Lf(x) = \int_0^{+\infty}\Big(-1+\frac{t}{2}\Big)e^{-tx}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$$
car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-tx}dt = \frac{1}{x^2}$ en intégrant par parties.

D - Si $n\in\mathbb{N}^\star$, $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n^2}$
donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par convergence normale.
On en déduit que $Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(0)\in\mathbb{R}$.

Partie IV

A - $\varphi : (x,t) \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha,+\infty[\,\times\mathbb{R}_+$ avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k\varphi(x,t)$.
Si $\alpha<\beta$ on choisit γ dans $]\alpha,\beta[$ et alors $\gamma\in E$.
Si $x\geqslant\beta$ et $t\geqslant 0$, $\left|\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k\big|f(t)\big|e^{-\beta t}$ avec $t^ke^{-\beta t} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-\gamma t})$ par croissances comparées.
Cela montre que $t\mapsto t^k\big|\varphi(\beta,t)\big|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et, en tant qu'intégrale paramétrée, que Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha,+\infty[$ avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x>\alpha$, $(Lf)^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(-t)^kf(t)e^{-tx}dt$.

B - Comme $f\geqslant 0$ la question II.A. montre que $E=E'$.
Si $x=-a$ alors $t^ne^{-t(x+a)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ ou $+\infty$ et donc $-a\notin E$.
Si $x>-a$ alors $t^ne^{-t(x+a)} \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{-2})$ d'où $a\in E$ et donc, d'après I.B. $E=E'=]-a,+\infty[$.
Si $x\in E$ et $T>0$, en intégrant par parties :
$\displaystyle\int_0^T t^ne^{-t(x+a)}dt = \Big[-\frac{t^ne^{-t(x+a)}}{(a+x)}\Big]_{t=0}^{t=T} + \frac{n}{a+x}\int_0^T t^{n-1}e^{-t(x+a)}dt$ et, quand