Si n et k sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

I Approximation

I.A – Quelques calculs préliminaires

Dans cette sous-partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

I.A.1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

I.A.2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

I.A.3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

I.A.4) Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

I.B – Étude de $S(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

I.B.1) Majoration de $S(x)$: première méthode

On note

- V l'ensemble des entiers $k \in \{0, \ldots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$,

- W l'ensemble des entiers $k \in \{0, \ldots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$,

et on pose $\displaystyle S_V(x) = \sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ et

$$S_W(x) = \sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

a) Montrer que $S_V(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot$

b) Montrer que $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}\cdot$

c) En déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}\cdot$

I.B.2) Majoration de $S(x)$: seconde méthode

a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

b) À l'aide de la question I.A.4, en déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$

I.C – Application à l'approximation uniforme

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\|\cdot\|_\infty$: $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Pour $f\in\mathcal{C}$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x\in[0,1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier $\|B_n(f)-f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

I.C.1) Un exemple

Si $f(x) = x^2$ pour tout $x\in[0,1]$, déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f)-f\|_\infty$

I.C.2) Soit $f\in\mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x\in[0,1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\Big(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\Big)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

I.C.3) a) Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors

$$\|B_n(f)-f\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.$$

b) En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe un réel c tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\|B_n(f)-f\|_\infty \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}\cdot$

c) Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

I.C.4) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in [0,1], f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r.$$

II Un théorème de Hardy-Littlewood

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R_a = 1$ et que la somme f de cette série, définie par

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\sim} \frac{1}{1-x} \qquad \text{(II.1)}$$

On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\widetilde{a_n} = \dfrac{A_n}{n+1}$.

Ainsi, $\widetilde{a_n}$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \ldots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des a_n lorsque n tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \qquad \text{(II.2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{a_n} = 1 \qquad \text{(II.3)}$$

II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2

II.A.1) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

II.A.2) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant II.1 mais ne convergeant pas vers 1.

II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3

II.B.1) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

II.B.2) On considère les fonctions

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^2} \text{ et } \psi : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2(1-x)}.$$

Déterminer des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ telles que, pour tout $x\in\,]-1,1[, \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et $\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$.

On explicitera en fonction de n, suivant la parité de n, les réels u_n et v_n.

II.B.3) Calculer $\widetilde{v_n}$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0,\dots,v_n$).

II.B.4) Construire à l'aide de ψ un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant II.1 mais ne vérifiant pas la propriété II.3.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer II.1 et on fait l'hypothèse supplémentaire : $\quad \forall n\in\mathbb{N}, a_n\geqslant 0. \quad$ (II.4)

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\widetilde{a_n})_{n\geqslant 0}$, est de démontrer la propriété II.3
(théorème de Hardy et Littlewood).

II.C – Majoration de la suite

II.C.1) Pour tout $x\in[0,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que $f(x)\geqslant A_n x^n$.

II.C.2) Montrer l'existence d'un entier $N>0$ tel que

$$\forall n\geqslant N, f(e^{-1/n})\leqslant \frac{2}{1-e^{-1/n}}.$$

II.C.3) En déduire que la suite $(\widetilde{a_n})_{n\geqslant 0}$ est majorée.

II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de $(\widetilde{a_n})_{n\geqslant 0}$ par un réel >0

On désigne par $\mu>0$ un majorant de la suite $(\widetilde{a_n})_{n\geqslant 0}$: $\forall n\in\mathbb{N}, \widetilde{a_n}\leqslant\mu$

II.D.1) a) Pour tout $x\in\,]-1,1[$, montrer que $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in[0,1[$ et tout $N\in\mathbb{N}^\star$

$$\frac{f(x)}{1-x}\leqslant A_{N-1}\frac{1-x^N}{1-x}+\mu\sum_{k=N}^{\infty}(k+1)x^k.$$

c) En déduire que pour tout $x\in[0,1[$ et tout $N\in\mathbb{N}^\star$

$$f(x)\leqslant A_{N-1}+\mu\Big((N+1)x^N+\frac{x^{N+1}}{1-x}\Big).$$

II.D.2) Soit λ un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier $N_0>0$ tel que pour tout $N\geqslant N_0$,

$$f(e^{-\lambda/N})\geqslant\frac{1}{2(1-e^{-\lambda/N})}\geqslant\frac{N}{2\lambda}.$$

b) Montrer que pour tout $N\geqslant N_0$,

$$\widetilde{a_{N-1}}\geqslant\frac{1}{2\lambda}-\mu e^{-\lambda}\Big(1+\frac{1}{N}+e^{-\lambda/N}\frac{1}{N(1-e^{-\lambda/N})}\Big).$$

c) Déterminer en fonction de λ la limite, quand N tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

d) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

II.D.3) Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $\widetilde{a_n} \geqslant \nu$.

II.E – Démonstration de la propriété II.3, due à Karamata

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(x) = 1/x$ si $x \geqslant e^{-1}1$ et $g(x) = 0$ sinon. On fixe un réel $\varepsilon \in]0, e^{-1}[$. On définit deux applications continues $g^+, g^- : [0,1] \to \mathbb{R}$ ainsi :

- g^+ est affine sur $[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}]$ et coïncide avec g sur $[0, e^{-1}-\varepsilon] \cup [e^{-1}, 1]$.
- g^- est affine sur $[e^{-1}, e^{-1}+\varepsilon]$ et coïncide avec g sur $[0, e^{-1}[\cup [e^{-1}, 1]$.

Pour tout entier $N > 0$ on pose $x_N = e^{-1/N}$.

On rappelle que dans cette sous-partie, on fait les hypothèses II.1 et II.4

II.E.1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g^+(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 g^-(t)dt$.

II.E.2) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)dt.$$

On considérera d'abord le cas particulier $P(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

II.E.3) Établir l'existence de deux polynômes P, Q à coefficients réels tels que : $\forall x \in [0,1], g^-(x) - \varepsilon \leqslant P(x) \leqslant g(x) \leqslant Q(x) \leqslant g^+(x) + \varepsilon$.

II.E.4) Établir l'existence d'un $N_1 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant N_1$,

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geqslant \int_0^1 P(t)dt - \varepsilon$$

et

$$(1-x_N)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leqslant \int_0^1 Q(t)dt - \varepsilon.$$

II.E.5) Déduire des trois questions précédentes que pour tout entier $N \geqslant N_1$,

$$1 - 5\varepsilon \leqslant (1-x_N)A_N \leqslant 1 + 5\varepsilon.$$

II.E.6) Conclure.

Solution

Partie I

I.A -

I.A.1) $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$

I.A.2) Comme, $k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)}.$

Donc $S_1 = nx(x + (1-x))^{n-1} = nx.$

I.A.3) Comme, $k(k-1) \dbinom{n}{k} = n(n-1) \dbinom{n-2}{k-2}$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} \\ &= n(n-1)x^2 (x + (1-x))^{n-2} = n(n-1)x^2. \end{aligned}$$

I.A.4) $\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2x\dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2} = x^2 - 2x\dfrac{k}{n} + \dfrac{k(k-1)+k}{n^2}\cdot$

Donc $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 S_0 - 2\frac{x}{n} S_1 + \frac{1}{n^2}(S_2 + S_1).$

Il découle des questions précédantes que $S_4 = \dfrac{x(1-x)}{n}\cdot$

I.B -

I.B.1) a) $S_V(x) = \displaystyle\sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} S_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$

b) Si $k \in W$, $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leqslant \left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2\cdot$ Donc

$$\begin{aligned} S_W(x) &= \sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \sqrt{n} \sum_{k \in W} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{n} S_4 = \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}\cdot \end{aligned}$$

c) $V \cup W = [\![0, n]\!]$ et $V \cap W = \emptyset$.

Donc $\forall x \in [0, 1], S(x) = S_V(x) + S_W(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big(1 + x(1-x)\Big) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$

car $x(1-x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

I.B.2) a) L'inégalité demandée est : pour tout $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ et tout $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\times\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k^2}$.

b) Appliquons ce résultat avec

$a_k=\left|x-\dfrac{k}{n}\right|\sqrt{\dbinom{n}{k}\, x^k(1-x)^{n-k}}$ et $b_k=\sqrt{\dbinom{n}{k}\, x^k(1-x)^{n-k}}$, il vient :

$S(x)\leqslant\sqrt{S_4}\times\sqrt{S_0}=\sqrt{\dfrac{x(1-x)}{n}}$ d'après I.A.4). Comme on a prouvé en I.B.1), $\forall x\in[0,1], 0\leqslant x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$, on conclut que $\forall x\in[0,1], S(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$

I.C -

I.C.1) Si $f(x)=x^2, B_n(f)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{S_2+S_1}{n^2}$ puisque $k^2=k(k-1)+k$. Donc $B_n(f)(x)-x^2=\dfrac{x(1-x)}{n}\cdot$

Toujours d'après I.B.1), $\forall x\in[0,1], 0\leqslant x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$ avec égalité si, et seulement si, $x=\dfrac{1}{2}\cdot$ Donc $\|B_n(f)-f\|_\infty=\dfrac{1}{4n}\cdot$

I.C.2) Comme $S_0=1$, on a $f(x)=f(x)S_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x)x^k(1-x)^{n-k}$.

Donc $\forall x\in[0,1], B_n(f)(x)-f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

I.C.3) a) Si f est δ-lipschitzienne, $\forall(x,y)\in[0,1]^2, |f(x)-f(y)|\leqslant\delta|x-y|$.
On déduit alors de I.C.2)

$\forall x\in[0,1], |B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\delta\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\delta S(x)$.

Le résultat découle de I.B.2)b).

b) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on déduit de l'inégalité des accroissements finis que f est α-lipschitzienne où $\alpha=\|f'\|_\infty$. On déduit le résultat de a) avec $c=\dfrac{\alpha}{2}\cdot$

c) Si f est continue sur $[0,1]$ et de de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ on a $\forall(x,y)\in[0,1], |f(x)-f(y)|\leqslant\left|\displaystyle\int_x^y f'(t)dt\right|\leqslant M|x-y|$ où $M=\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f'(t)|$.

La conclusion est analogue à celle de b).

I.C.4) Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c}{\sqrt{n}}=0$, pour tout $r>0$ il existe $n_0\in\mathbb{N}^\star$ tel que $\dfrac{c}{\sqrt{n_0}}\leqslant r$. Soit n_0 ainsi choisi. Notons $P(x)=B_{n_0}(f)(x)$.

Pour tout $x \in [0,1], |P(x) - f(x)| \leqslant \|B_{n_0}(f) - f\|_\infty \leqslant r$ *i.e.*

$$\forall x \in [0,1], f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r.$$

Partie II

II.A -

II.A.1) Des résultats sur les séries géométriques, on déduit :

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{1}{1-x^2} = \sum_{p=0}^{\infty} x^{2p}.$$

Donc $b_{2p} = 1$ et $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

II.A.2) $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2(1-x)}$.

Donc $a_n = 2b_n$ est telle que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie II.1 et diverge.

II.B -

II.B.1) $\forall t \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n$.

Du théorème de dérivation des séries entières, on déduit que

$\forall t \in]-1,1[, \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{1-t}\Big) = \dfrac{1}{(1-t)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$.

Toujours, d'après ce théorème, la série entière est de rayon de convergence 1. Elle diverge en 1 et -1 car $\sum(n+1)$ et $\sum(n+1)(-1)^n$ divergent grossièrement.

II.B.2) Il s'ensuit que $\forall x \in]-1,1[, \varphi(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$.

D'où $u_{2n} = n+1$ et $u_{2n+1} = 0$.

$$\forall x \in]-1,1[, \psi(x) = (1-x)\varphi(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})x^n.$$

Donc $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$ si $n \geqslant 1$.

D'où $\forall p \in \mathbb{N}, v_{2p} = p+1$ et $v_{2p+1} = -(p+1)$.

II.B.3) $\widetilde{v_n} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \dfrac{1}{n+1}\Big(u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})\Big) = \dfrac{u_n}{n+1}$.

Donc $\widetilde{v_{2p}} = \dfrac{p+1}{2p+1}$ et $\widetilde{v_{2p+1}} = 0$.

II.B.4) $\psi(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{4(1-x)}$. Donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $a_n = 4v_n$ vérifie II.1 et pas II.3. puisque $(\widetilde{a_n})_{n\geqslant 0}$ diverge.

II.C -

II.C.1) Comme les a_n sont positifs, si $x \in [0,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.