Chapitre 1

Algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est le grand incontournable de l'agrégation. Il est impossible de faire l'impasse dessus. Si quelques candidats sont encore mal à l'aise avec les raisonnements en algèbre linéaire, la plupart maîtrisent au moins le niveau ≪ maths spé ≫. Il faut par exemple, savoir faire la différence entre polynôme minimal et polynôme caractéristique. Ainsi, à l'oral, il n'est pas seulement nécessaire de connaître les bases de l'algèbre linéaire, mais il faut aussi savoir approfondir les notions étudiées. C'est à cette seule condition que le candidat pourra obtenir une bonne note.

≪ Des questions élémentaires comme "un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est-il aussi de dimension finie ?" peuvent dérouter un candidat. ≫

Rapport du jury de la session 2015

Dans ce chapitre, on considère que $\mathbb{K}$ est un corps. Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, nous noterons χ_u son polynôme caractéristique. On notera $GL(E)$ le groupe linéaire de E, en correspondance bijective naturelle avec $GL_n(\mathbb{K})$. Notons

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t MM = I_n\}$$

et

$$S_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K}), \det(M) = 1\}.$$

Si D est une matrice diagonale à coefficients $(d_1, \cdots, d_n)$, alors on écrira

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n).$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires de E dans E.

1.1 Exercices de réduction et déterminants

Exercice 1.

1. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables sur* $\mathbb{C}$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *montrer que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction.

1. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On sait que* M *est trigonalisable, car* $\mathbb{C}$ *est algébriquement clos (son polynôme caractéristique est nécessairement scindé). Soit donc* T *une matrice triangulaire supérieure et* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $M = P^{-1}TP$. *Pour un entier naturel non nul* p, *on introduit* T_p *la matrice triangulaire supérieure* $T_p = T + D_p$, *où*
$$D_p = \mathrm{diag}(\frac{1}{p}, \cdots, \frac{n}{p}).$$
Alors, pour p *assez grand, les valeurs propres de* T_p *sont toutes distinctes, donc* T_p *est diagonalisable, et la suite de matrices* $P^{-1}T_pP$ *tend vers* M. *Ainsi l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Pour un entier naturel non nul* p, *on introduit la matrice*
$$M_p = M - \frac{1}{p}I_n.$$
Il est évident que la suite (M_p) *converge vers* M. *De plus,* M_p *est inversible à partir d'un certain rang. En effet,* $\det(M_p)$ *ne peut pas prendre plus de* n *fois la valeur zéro. Donc, il existe une suite de matrices inversibles qui tend vers* M. *Ainsi* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2.

Dans cet exercice, on cherche à calculer la puissance k*-ième d'une matrice diagonalisable. Soit la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
2. *En déduire que A est diagonalisable.*
3. *Donner les valeurs propres, vecteurs propres, et sous-espaces propres associés à A. Donner une base de diagonalisation $\mathcal{B}$ de A.*
4. *En déduire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la nouvelle base $\mathcal{B}$.*
5. *Calculer la matrice $P^{-1}AP$ et vérifier qu'elle est bien diagonale.*
6. *En déduire une expression de A^k, pour tout entier k.*

Correction.

1. *On doit calculer*
$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix}.$$
Développons selon la première colonne. On a :
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} &= (-X)((1-X)(2-X)-1) + 1(-1-2(1-X)) \\ &= X(X-1)(2-X) + (X-1) + 2(X-1) \\ &= (X-1)(X(2-X)+3) \\ &= (X-1)(-X^2+2X+3). \end{aligned} \tag{1.1}$$
Dans l'objectif de la question suivante factorisons ce polynôme. Il s'agit d'un trinôme du second degré, dont le discriminant vaut 16. *Ainsi, les deux solutions sont* 3 *et* -1. *Donc*
$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)(X+1)(X-3).$$
2. *On a trouvé ici un polynôme annulateur (par le théorème de Cayley-Hamilton) scindé à racines simples, ceci est suffisant pour affirmer que A est diagonalisable. Attention à éviter l'écueil suivant : on n'a pas A diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Cette confusion est très souvent faite. Une condition nécessaire et suffisante pour démontrer qu'une matrice est diagonalisable est de trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples. Mais ce ne doit pas être le polynôme caractéristique en général.*

3. *Les valeurs propres se lisent directement sur le polynôme caractéristique : ce sont* 1, -1 *et* 3. *Cherchons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.*

   — *Pour la valeur propre 1 : On cherche un vecteur* $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *qui vérifie* $Au = u$. *On résout alors le système d'équations*

   $$\left\{\begin{aligned} y + 2z &= x \\ y - z &= y \\ x - y + 2z &= z \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

   On obtient alors $z = 0$ *et* $y = x$. *Un vecteur propre associé est donc* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et le sous-espace propre associé est* $\mathrm{vect}(u)$.

   — *Pour la valeur propre* -1 *: On cherche un vecteur* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *qui vérifie* $Av = -v$. *On résout alors le système d'équations*

   $$\left\{\begin{aligned} y + 2z &= -x \\ y - z &= -y \\ x - y + 2z &= -z \end{aligned}\right. \tag{1.3}$$

   soit

   $$\left\{\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

   soit encore

   $$\left\{\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \\ -2y + z &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

   où l'on a remplacé la troisième ligne par elle-même moins la première ligne. On obtient alors $z = 2y$ *et* $x = -5y$. *Un vecteur propre associé est donc* $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et le sous-espace propre associé est* $\mathrm{vect}(v)$.

— *Pour la valeur propre 3 : On cherche un vecteur* $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *qui vérifie* $Aw = 3w$. *On résout alors le système d'équations*

$$\begin{cases} y + 2z = 3x \\ y - z = 3y \\ x - y + 2z = 3z \end{cases} \tag{1.6}$$

soit

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

soit encore

$$\begin{cases} -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où l'on a remplacé la première ligne par elle-même plus trois fois la troisième. On obtient alors $z = -2y$ *et* $x = -y$. *Un vecteur propre associé est donc* $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et le sous-espace propre associé est* $\mathrm{vect}(w)$.

Vérifions à présent que les vecteurs u, v, w *forment une base de* $\mathbb{C}^3$. *Comme il y a trois vecteurs, il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient* λ_1, λ_2 *et* λ_3 *trois scalaires, tels que*

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0.$$

Démontrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *On a le système :*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

soit

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ 6\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

La deuxième et troisième équation donnent $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$, puis la première donne finalement $\lambda_2 = 0$. Ainsi, la famille est libre, et est donc une base de $\mathbb{C}^3$.

On peut remarquer d'une manière générale, que des vecteurs propres, pour des valeurs propres deux à deux distinctes forment toujours une famille libre (démonstration laissée au lecteur).

Il est très important de bien montrer ce que l'on fait, et annoncer ce que l'on démontre. Il n'est pas suffisant de montrer que la famille est libre, si l'on a pas argumenté l'égalité des cardinaux (une famille libre à n éléments dans un espace de dimension n est une base). De plus, il est important de bien poser les variables que l'on utilise, pour ne pas d'emmêler. Les λ_i sont des complexes donnés quelconques, alors que u, v, w sont les vecteurs que l'on vient de trouver et exhiber.

4. *La matrice P est la matrice où, en colonne, sont donnés les nouveaux vecteurs u, v, w en fonction des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Ainsi,*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Le plus gros de la question est de calculer P^{-1}. Il n'y a pas qu'une manière de le faire, mais voici la plus rapide : Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^3$, nous devons résoudre l'équation $PX = Y$ d'inconnue X et de paramètre Y. Ainsi, on aura $X = P^{-1}Y$ et on pourra lire les coefficients de P^{-1}. On a donc :*

$$\begin{cases} x + 5y + z = a \\ x - y - z = b \\ -2y + 2z = c \end{cases} \tag{1.11}$$

D'où en soustrayant la seconde ligne à la première,

$$\begin{cases} 6y + 2z = a - b \\ x - y - z = b \\ y = -\dfrac{1}{2}c + z \end{cases} \tag{1.12}$$

Donc

$$\begin{cases} -3c + 8z = a - b \\ x - y - z = b \\ y = -\frac{1}{2}c + z \end{cases} \tag{1.13}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}(2a + 6b + 2c) \\ y = -\frac{1}{8}(a - b - c) \\ z = \frac{1}{8}(a - b + 3c) \end{cases} \tag{1.14}$$

On a alors

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

6. *La question est très classique, et il est très fréquent de voir de cette manière l'utilité de la diagonalisation. Soit k un entier naturel non nul. Comme $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ et que les coefficients de D^k sont les coefficients de D à la puissance k, on a :*

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5(-1)^k & 3^k \\ 1 & (-1)^{k+1} & -3^k \\ 0 & 2(-1)^{k+1} & 2.3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 + 5(-1)^k + 3^k & 6 + 5(-1)^{k+1} - 3^k & 2 + 5(-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ 2 + (-1)^{k+1} - 3^k & 6 + (-1)^k + 3^k & 2 + (-1)^k - 3^{k+1} \\ 2(-1)^{k+1} + 2.3^k & 2(-1)^k - 2.3^k & 2(-1)^k + 2.3^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Voici un exercice classique sur le critère de codiagonalisation de deux matrices. Rappelons que deux matrices A et B sont dites codiagonalisables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Exercice 3 (Critère de codiagonalisation)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et deux endomorphismes u, v de E.

1. *Supposons que u et v commutent. Démontrer que pour toute valeur propre λ de u, le sous-espace propre $\ker(u - \lambda \mathrm{Id})$ est stable par v.*
2. *Supposons maintenant u diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u. Démontrer que $u|F$ est aussi diagonalisable.*
3. *En déduire le critère de codiagonalisation pour deux endomorphismes : u et v sont simultanément diagonalisables si et seulement si ils sont diagonalisables et commutent.*
4. *Démontrer ce même critère de diagonalisation pour une famille d'endomorphismes $(u_i)_{i \in I}$ de E : si les endomorphismes u_i sont diagonalisables et commutent deux à deux, alors ils sont simultanément diagonalisables.*

Correction.

1. *Soit $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$. On a :*
$$\begin{aligned}(u - \lambda \mathrm{Id})(v(x)) &= u \circ v(x) - \lambda v(x) \\ &= v \circ u(x) - \lambda v(x) \\ &= v \circ (u - \lambda \mathrm{Id})(x) \\ &= v(0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.16}$$
2. *Nous utilisons ici le théorème suivant : u est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples. Par hypothèse, il existe P, polynôme scindé à racines simples, tel que $P(u) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in F$, $P(u|F)(x) = P(u)(x) = 0$, et ceci achève la question.*
3. — *Supposons que u et v soient diagonalisables et commutent. Soient $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ les valeurs propres de u et $\{\mu_1, \cdots, \mu_l\}$ les valeurs propres de v. Comme u est diagonalisable, on a*
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}).$$