Problème 1 : construction de triangles

Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts B et C et un point M n'appartenant pas à la droite (BC). Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point A qui la vérifie. *On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.*

1. M est le centre de gravité du triangle ABC.

2. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. M est l'orthocentre du triangle ABC.

4. M est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Problème 2 : autour du théorème des valeurs intermédiaires

Darboux systématisera dans son mémoire de 1875 la démarche amorcée dans sa correspondance où il expose au coup par coup [. . .] les propriétés implicites de la pratique commune de la notion de fonction continue.
Il cherche à dégrossir le concept de fonction continue et à le dépouiller de tout ce qui n'est pas strictement induit par sa définition, et que l'« usage», l'activité mathématique passée lui avait donc conféré. Cauchy avait cassé le cadre fonction continue/fonction analytique. Darboux cherche à casser les assimilations suivantes : fonction continue/fonction monotone, fonction continue entre fonction qui passe par toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, fonction continue/fonction dérivable. En réduisant à sa juste mesure la classe des fonctions continues, Darboux donne une réalité, une épaisseur aux classes des fonctions qui ne le sont pas. Il libère le concept de fonction du carcan de la continuité.

On se propose dans ce qui suit de mettre en lumière quelques points évoqués par le texte précédent.

Partie I : préliminaires

On pourra utiliser les résultats suivants :

- toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
- soient a et b des réels tels que $a < b$; toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes ;
- toute suite croissante et majorée est convergente, toute suite décroissante et minorée est convergente ;

• si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et si pour tout entier n on a $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Les résultats suivants sont à démontrer ; ils ne doivent pas être considérés ici comme des propriétés connues.

1. Démontrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite ℓ. alors, pour tout entier n, on a $w_n \geqslant \ell$. *(on raisonnera par l'absurde).*

2. **Théorème des suites adjacentes**
On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes, c'est à dire telles que :

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante} \\ \text{la suite } (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \end{cases}$$

2.1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.2. En déduire que, pour tout entier n, on a : $v_n - u_n \geqslant 0$.

2.3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

2.4. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

3. **Suite et application continue**
Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers un réel ℓ. Soit f une application, définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et continue en ℓ. Montrer que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Partie II : propriété des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide. On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a,b)\in I^2$ tel que $a < b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

1. **Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires**
On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) : si f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ alors f possède la propriété $\mathcal{P}$.

Soit $(a,b)\in I^2$ tel que $a < b$. La conclusion étant immédiate si $f(a) = f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a) < f(b)$; dans la suite on supposera cette hypothèse vérifiée. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a,\ b_0 = b$

et pour tout entier n :

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda \text{ alors } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda \text{ alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}\cdot$$

1.1. Justifier que, pour tout entier n, $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$.

1.2. Montrer que, pour tout entier n : $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}\cdot$

1.3. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1.4. Conclure.

2. **Application 1 : un théorème du point fixe**
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

3. **Application 2 : première formule de la moyenne**
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que si g est positive sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

4. **Application 3**
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

4.1. Montrer que, pour tout entier n, non nul, il existe $c_n \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que : $f(c_n) = f\left(c_n + \dfrac{1}{n}\right)\cdot$

indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ par $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$ et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

4.2. Montrer que si on remplace $\dfrac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]\cdot$

Partie III : réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

Bien avant Darboux, [. . .] Bolzano avait critiqué comme incorrect l'acceptation du concept de continuité d'une fonction dans le sens où la propriété des valeurs intermédiaires est vérifiée par la fonction. Mais Lebesgue note dans ses leçons sur l'intégration *qu'« on avait pris en France l'habitude de définir une fonction continue celle qui ne peut passer d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et l'on considérait cette définition comme équivalente à celle de Cauchy. Darboux, qui construisait dans son Mémoire des fonctions dérivées non continues au sens de Cauchy, a pu montrer que les deux définitions de la continuité étaient forts différentes».*

1. **Un exemple**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0.$$
Montrer que la fonction f vérifie la proposition $\mathcal{P}$ mais n'est pas continue en 0.

2. **Une classe de fonctions qui vérifient $\mathcal{P}$: un théorème de Darboux**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a, b) \in I^2$ $(a < b)$.
On se propose de montrer que f' vérifie $\mathcal{P}$.
On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

2.1. Justifier qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$.

2.2. Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.

2.3. Conclure.

2.4. En déduire un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne possède pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. **Une condition pour qu'une fonction qui vérifie $\mathcal{P}$ soit continue.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non vide et telle que :
- f vérifie $\mathcal{P}$
- pour tout $x \in I$, $f^{-1}\big(\{f(x)\}\big)$ est fermé dans I.

Montrer que f est continue sur I.

Problème 3 : quelques propriétés des polynômes de Laguerre

On pose pour tout entier naturel n, et pour tout réel x :
$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\, h_n^{(n)}(x).$$

Partie I : étude de la famille ($\boldsymbol{L_n}$)

1. Justifier les écritures précédentes, c'est-à-dire que L_n est bien définie pour tout entier n.

2. Calculer L_0, L_1 et L_2 explicitement.

3. En précisant le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé, écrire une procédure permettant d'afficher L_n pour une valeur de n donnée.

4. Montrer que pour tout entier n, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.

Dans toute la suite, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
5.1. Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L'_n.
5.2. Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.
5.3. En déduire que : $L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1}\, L'_n + \Big(1 - \dfrac{X}{n+1}\Big)L_n$.

6. En remarquant que $(h'_{n+1})^{(n+1)} = \big((h_{n+1})^{(n+1)}\big)'$, montrer la relation : $L'_{n+1} = L'_n - L_n$.

7. En utilisant les différents résultats obtenus, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ XL''_n + (1-X)L'_n + nL_n = 0$$
et que :
$$\forall n \geqslant 1,\ (n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0.$$

Partie II : application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme L_n.

2.
2.1. Soient n un entier naturel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^{n+2}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \text{ si } x \neq 0.$$
Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 mais que f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 0 en 0.

2.2. Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$. Donner une condition suffisante pour que $f^{(n-k)}$ admette un développement limité à l'ordre k en 0.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n$.

3.1. Déterminer le développement limité à l'ordre $n+N$ en 0 de h_n.

3.2. En déduire le développement limité à l'ordre N en 0 de $h_n^{(n)}$.

3.3. Montrer alors que l'on a au voisinage de 0 : $L_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} c_p x^p + o(x^N)$

où $\forall p \in [\![0, N]\!],\ c_p = \dfrac{1}{p!} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k}$.

3.4. En déduire que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \begin{cases} (-1)^p \dbinom{n}{p} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Partie III : étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée

Pour tous P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \big(P|Q\big) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

1. Montrer que φ est bien définie.

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.

4.

4.1. Montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \exists Q_k \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x).$$

4.2. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x)\, dx.$$

5. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $\big(\mathbb{R}[X], \varphi\big)$.

Connaissance utiles

- Géométrie du triangle.
- Continuité, dérivation.

Solution

Problème 1

On fera un dessin pour chaque question.

1. En utilisant les affixes des points A, B, C, M notées a, b, c, m on a :
$m = \dfrac{a+b+c}{3} \iff a = 3m - b - c$ d'où l'existence et l'unicité de A.

2. Si M n'est pas sur la médiatrice de $[B, C]$ alors aucun cercle de centre M ne passe simultanément par B et C, donc il n'y a aucune solution.
Si M est sur la médiatrice de $[B, C]$ alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre M et de rayon MB passe par B et C et A est solution si, et seulement si, $A \in \mathcal{C} \setminus \{B, C\}$.

3. Soient D la perpendiculaire à (BC) passant par M et Δ la perpendiculaire à (BM) passant par C. Comme les droites (BC) et (BM) ne sont pas parallèles, D et Δ ne le sont pas non plus et donc $D \cap \Delta$ est de cardinal 1.
A est solution si, et seulement si, $A \in D \cap \Delta$ d'où une unique solution.

4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre M tangent à (BC).
On note D (resp. Δ) l'autre tangente à $\mathcal{C}$ passant par B (resp. C).
Alors A est solution si, et seulement si, $A \in D \cap \Delta$.
D et Δ sont parallèles si, et seulement si, $MB = MC = \sqrt{2}d\big(M, (BC)\big)$ auquel cas il n'y a pas de solution. Sinon il y en a exactement une.

Problème 2

Partie I

1. Sinon il existe un entier n_0 tel que $w_{n_0} < \ell$.
Alors, si $n \geqslant n_0$, par décroissance, $w_n \leqslant w_{n_0}$ et donc, d'après une propriété admise, $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} w_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} w_{n_0} = w_{n_0}$, ce qui contredit l'hypothèse.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geqslant \ell$.

2.1. $v - u$ est décroissante comme somme de telles suites.

2.2. Par 1. on en déduit que $v - u$ est positive.

2.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ et, donc, u est croissante majorée par v_0 donc convergente. De même v est décroissante minorée par u_0 donc convergente.

2.4. On note ℓ_u et ℓ_v les limites des suites u et v.
On a $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-v_n) = \ell_u - \ell_v$ d'où $\ell_u = \ell_v$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en ℓ on peut choisir $\eta > 0$ tel que si $x \in X$ et $|x - \ell| < \eta$, alors $\big|f(x) - f(\ell)\big| < \varepsilon$.

Soit n_0 entier tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \eta$.
Alors, pour $n \geqslant n_0$ on a $\bigl|f(u_n) - f(\ell)\bigr| < \varepsilon$ et donc $\bigl(f(u_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Partie II

1.1. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en distinguant les deux cas de la construction, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, et donc $\bigl([a_n, b_n]\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments de premier terme $[a, b]$.
1.2. Immédiat en distinguant les deux cas.
1.3. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc, d'après 1.1. les deux suites sont adjacentes.
1.4. On note c leur limite commune.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < \lambda$ et $f(b_n) \geqslant \lambda$.
Comme f est continue en c, par I.3. il vient $f(c) \leqslant \lambda$ et $f(c) \geqslant \lambda$ *i.e.* $f(c) = \lambda$, ce qui montre que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2. $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a, b]$ par différence et $g(a) \leqslant 0$, $g(b) \geqslant 0$ donc, comme elle vérifie $\mathcal{P}$, on a $0 \in g\bigl([a, b]\bigr)$, ce qu'il fallait démontrer.

3. $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ croissante sur $[a, b]$ nulle en a. Si $G(b) = 0$ on en déduit la nullité de G et donc de G' qui n'est autre que g. Dans ce cas $c = a$ convient.
Sinon $G(b) > 0$. Une propriété admise par l'énoncé et le fait que f vérifie $\mathcal{P}$ montrent que $f\bigl([a, b]\bigr)$ est un segment que l'on note $[m, M]$.
Si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ car $g(x) \geqslant 0$ d'où, en intégrant entre a et b, $mG(b) \leqslant \displaystyle\int_a^b fg \leqslant MG(b)$ d'où $\dfrac{\displaystyle\int_a^b fg}{G(b)} \in [m, M] = f\bigl([a, b]\bigr)$, ce qu'il fallait démontrer.

4.1. $0 = f(1) - f(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_n\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)$ par télescopage et donc il existe k et ℓ dans $[0, n-1]$ tels que $f_n\Bigl(\dfrac{k}{n}\Bigr) f_n\Bigl(\dfrac{\ell}{n}\Bigr) \leqslant 0$. Par $\mathcal{P}$ la fonction f_n admet un zéro dans le segment d'extrémités $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{\ell}{n}$, il suffit de le noter c_n.
4.2. f est continue sur $[0, 1]$ avec $f(0) = f(1) = 1$.
Si $0 \leqslant x \leqslant 1 - \alpha$ alors $f(x + \alpha) - f(x) = \alpha\left[1 - \cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{\alpha}\Bigr)\right] > 0$, le résultat précédent n'est donc plus vrai.