1. FONDATIONS

A. L'ensemble des entiers naturels

I. Définition

On postule l'existence d'un triplet $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ où $\mathbb{N}$ est un ensemble, 0 un élément particulier de $\mathbb{N}$ et σ une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même appelée fonction de succession tels que

(P_1) σ est injective,

(P_2) l'image de σ est contenue dans l'ensemble $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(P_3) $\mathbb{N}$ est le seul sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui contienne 0 et soit stable par la fonction de succession.

L'ensemble $\mathbb{N}$ s'appelle ensemble des entiers naturels, l'élément 0 s'appelle zéro. La propriété (P_3) est le principe de récurrence. On notera que le principe de récurrence s'étend aux relations $\mathcal{R}(n)$ dans lesquelles l'élément n est astreint à rester dans $\mathbb{N}$. Si, par exemple, $\mathcal{R}(0)$ est vraie et si $\mathcal{R}(n)$ implique $\mathcal{R}(\sigma(n))$, alors $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: en effet, il suffit de considérer la partie A de $\mathbb{N}$ constituée des entiers n vérifiant la relation considérée.

1. Proposition

L'image de σ est égale à $\mathbb{N}^\star$: $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^\star$

Comme d'après $(P_2), \sigma(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^\star$, il suffit de prouver que $\mathbb{N}^\star \subset \sigma(\mathbb{N})$. Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier naturel non nul x n'appartenant pas à $\sigma(\mathbb{N})$. Introduisons alors la partie $\mathcal{P}$ constituée des entiers naturels n tels que $n \neq x$. Comme x est supposé non nul, 0 appartient à $\mathcal{P}$. Maintenant si l'entier n appartient à $\mathcal{P}$, comme x n'appartient pas à $\sigma(\mathbb{N})$, $\sigma(n) \neq x$ et donc $\sigma(n)$ appartient à $\mathcal{P}$. Le principe de récurrence montre alors que $\mathcal{P} = \mathbb{N}$ et donc $x \notin \mathbb{N}$ ce qui contredit le choix de x.

Pour tout entier naturel n appartenant à $\mathbb{N}^\star$, on note $\pi(n)$ et on appelle prédécesseur de l'entier n l'unique entier naturel m tel tel que $\sigma(m) = n$. Conformément à l'usage on pose $1 = \sigma(0)$, $2 = \sigma(1)$,. . .

La donnée de $\mathbb{N}$ permet d'effectuer la ***construction d'applications par récurrence***.

2. Théorème

Soient E un ensemble non vide, a un élément de E, f une application de E dans lui-même. Il existe alors une application φ et une seule de $\mathbb{N}$ dans E telle que : $\varphi(0) = a$ et $\varphi \circ \sigma = f \circ \varphi$.

En d'autres termes, le diagramme
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{N} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$
est commutatif.

Pour établir le théorème, on introduit l'application g de $\mathbb{N} \times E$ dans lui-même définie par la formule $g(n,y) = (\sigma(n), f(y))$ et l'on considère la partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}\times E$ constituée des sous-ensembles A tels que : $(0,a) \in A$ et $g(A) \subset A$.

Comme $\mathbb{N}\times E$ appartient à $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ est non vide. Considérons la partie Γ définie par $\Gamma = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$. Elle a pour propriétés

(1) $p(\Gamma) = \mathbb{N}$ où p désigne la projection de $E \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$,

(2) $g(\Gamma) \subset \Gamma$,

(3) $\{(0,a)\} \cup g(A)$ appartient à $\mathcal{F}$,

(4) $\Gamma = \{(0,a)\} \cup g(\Gamma)$.

Grâce à une récurrence, on note alors que l'ensemble constitué des entiers naturels m pour lesquels l'ensemble Γ_m des y appartenant à E est un singleton n'est autre que $\mathbb{N}$. On en conclut que Γ est un graphe fonctionnel. L'application φ de $\mathbb{N}$ ans E dont Γ est le graphe satisfait aux conditions de l'énoncé.

3. Corollaire

Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans lui-même et ψ une application de F dans E. Il existe alors une application φ et une seule de $F \times \mathbb{N}$ dans E telle que

(i) *pour tout y de $F, \varphi(y,0) = \psi(y)$,*

(ii) *pour tout couple $(y,n) \in F \times \mathbb{N}, \varphi(y,\sigma(n)) = f(\varphi(y,n))$.*

4. Applications

1. Les axiomes $(P_1),(P_2),(P_3)$ caractérisent à un isomorphisme près le triplet $(\mathbb{N},0,\sigma)$. En d'autres termes, si $(\mathbb{N},0,\sigma)$ et $(\mathbb{N}',0',\sigma')$ sont deux triplets vérifiant les axiomes $(P_1),(P_2),(P_3)$, il existe une application bijective et une seule de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}'$ telle que $\varphi(0) = 0'$ et $\varphi\circ\sigma = \sigma'\circ\varphi'$.

2. Itérées d'une application d'un ensemble dans lui-même.

II. Addition des entiers naturels

En appliquant le corollaire précédant aux ensembles $E = F = \mathbb{N}$ et aux applications $f = \sigma$ et $\psi = I_{\mathbb{N}}$ on peut poser la

1. Définition

On appelle addition dans $\mathbb{N}$ et l'on note $+$ l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

(i) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = n$,*

(ii) *pour tout couple (n,m) d'entiers naturels, $n + \sigma(m) = \sigma(n+m)$*

2. Propriétés

1. Associativité : $\forall(a,b,c)\in\mathbb{N}^3, (a+b)+c = a+(b+c)$

2. L'élément 0 est **l'élément neutre** pour l'addition : $\forall a\in\mathbb{N}, a+0 = 0+a = a$

3. Commutativité : $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2, a+b = b+a$

(*On s'appuie sur le lemme :* $\forall a\in\mathbb{N}, a+1 = 1+a$)

4. Régularité de l'addition

Pour tout triplet (a,b,c) d'entiers naturels, les relations $a+c = b+c$ et $c+a = c+b$ entraînent $a = b$.

5. 0 est le seul élément inversible pour l'addition. Pour tout couple (a,b) d'entiers naturels, la relation $a+b = 0$ entraîne $a = b = 0$.

III. Multiplication des entiers naturels

En appliquant encore le corollaire du théorème, on peut poser la

1. Définition

On appelle multiplication dans $\mathbb{N}$ *et l'on note . l'application de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que*

(i) *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $n.0 = 0$,

(ii) *pour tout couple* (n,m) *d'entiers naturels,* $n.\sigma(m) = n.m+n$.

2. Propriétés

1. Associativité

2. L'élément 1 est **l'élément neutre** pour la multiplication

3. Commutativité

4. Élément absorbant : $\forall a\in\mathbb{N}, 0.a = a.0 = 0$

Pour tout triplet (a,b,c) d'entiers naturels, les relations $a+c = b+c$ et $c+a = c+b$ entraînent $a = b$.

5. La multiplication est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition.

6. La multiplication est intègre : $\forall(x,y)\in\mathbb{N}^2, x.y = 0 \Rightarrow (x = 0)$ ou $(y = 0)$.

7. La multiplication est régulière : $\forall(x,y,z)\in\mathbb{N}^3, z.x = z.y$ et $z\neq 0 \Rightarrow x = y$.

8. L'entier 1 est le seul élément inversible pour la multiplication : pour tout couple (a,b) d'entiers naturels, la relation $a.b = 1$ entraîne $a = b = 1$.

3. Exponentiation des entiers naturels

3.1. Définition

On appelle exponentiation dans $\mathbb{N}$ *et l'on note* $(a,b)\mapsto a^b$ *l'application de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que*

(i) *pour tout* $n\in\mathbb{N}, n^0 = 1$,

(ii) *pour tout couple d'entiers naturels* $(n,m), n^{\sigma(m)} = n^m.n$.

3.2. Propriétés

L'exponentiation possède les propriétés suivantes qui se prouvent par récurrence

1. Pour tout triplet (n,p,q) d'entiers naturels

$$n^p.n^q = n^{p+q}, \qquad (n^p)^q = n^{p\cdot q}, \qquad (n.p)^q = n^q.p^q.$$

2. Pour tout entier naturel n,

$$n^1 = n, \qquad 1^n = 1, \qquad 0^n = 1 \text{ si } n = 0 \text{ et } 0 \text{ si } n \neq 0.$$

4. Quotient

Si $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, en général, il n'existe pas d'entier naturel q tel que $x = q.y$. Mais dans le cas où un tel entier existe, il est nécessairement unique. On l'appelle le quotient exact de x par y et on le note x/y.

IV. La relation d'ordre (naturelle) sur $\mathbb{N}$

Dans $\mathbb{N}$, on note $x \leqslant y$ la relation binaire définie par les couples (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $y = x + z$.

1. Théorème

> *La relation binaire $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{N}$.*

On note $x < y$ la relation «$x \leqslant y$ et $x \neq y$». Avec cette notation, on peut énoncer

2. Proposition (loi de trichotomie)

> *Pour tout couple (x, y) d'entiers naturels on a soit $x < y$, soit $x = y$, soit $y < x$, chacune de ces relations excluant les deux autres.*

3. Proposition (compatibilité)

> ***1.*** *Pour tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels*
> *la relation $x \leqslant y$ entraîne $x + z \leqslant y + z$ et $x.z \leqslant y.z$,*
> *la relation $x.z \leqslant y.z$ avec $z \neq 0$ entraîne $x \leqslant y$.*
>
> ***2.*** *Pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'entiers naturels, les relations $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ entraînent $x + z \leqslant y + t$ et $x.z \leqslant y.t$.*

Conséquences

1. L'ordre est archimédien. Pour tout couple (x, y) d'entiers naturels avec $y \neq 0$, il existe un entier naturel n tel que $x \leqslant n.y$.

2. Pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'entiers naturels, les relations $x \leqslant y$ et $z < t$ entraînent $x + z < y + t$ et dans le cas où y est non nul, $x.z < y.t$.

4. Soustraction

Soient x et y deux entiers naturels. Si $x \leqslant y$, il existe un entier naturel z tel que $y = x + z$; on l'appelle la différence de y et de x et on la note $y - x$. On notera que si $x \leqslant y$, alors $y - x \leqslant y$.

Exercice

Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ alors $(y - x) + (t - z) = (y + t) - (x + z)$.

Si $x \leqslant y$ alors $z(y - x) = zy - zx$.

5. Théorème. Propriétés liées à l'ordre

> *L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$ possède les propriétés fondamentales suivantes*
> (i) *toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ;*
> (ii) $\mathbb{N}$ *n'a pas de plus grand élément ;*
> (iii) *toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.*

On traduit la propriété (i) est disant que $\mathbb{N}$ est un ensemble **bien ordonné**.

Nous allons établir les assertions (i) et (iii) et laisser au lecteur (ii).

(i) Soient P une partie non vide de $\mathbb{N}$ et M une partie de $\mathbb{N}$ constituée des entiers n tels que $n \leqslant x$ pour tout x de P. Puisque pour tout x de $P, 0 \leqslant x$, 0 appartient à M et donc M est non vide. Maintenant, considérons un élément x appartenant à P ; comme $\sigma(x) > x$, on en déduit que $\sigma(x)$ n'appartient pas à M ce qui prouve que $M \neq \mathbb{N}$. Montrons alors qu'il existe un entier naturel m appartenant à M tel que $\sigma(m) \notin M$; en effet, dans le cas contraire, comme $0 \in M$, par récurrence, il en découlerait que $M = \mathbb{N}$ ce qui n'est pas. Ainsi, il existe un élément m de M tel que $\sigma(m) \notin M$. Puisque $m \in M$, pour tout $x \in P, m \leqslant x$; de plus comme $\sigma(m) \notin M$, il existe $y \leqslant m$ tel que $y < \sigma(m)$ et donc nécessairement $y \leqslant m$, comme $y \in P$, on a $m \leqslant y$; par suite $m = y$ ce qui montre que m est le plus petit élément de P.

(iii) Soit P une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. On introduit la partie M constituée des entiers n tels que $n \geqslant x$ pour tout $x \in P$. Puisque P est majorée, M est non vide. D'après l'assertion (i), M admet un plus petit élément noté a. Ainsi, pour tout x de P, $x \leqslant a$. Montrons que a appartient à P.

En effet, dans le cas contraire, pour tout $x \in P$, on aurait $x < a$; comme $a \neq 0$ il existe un entier naturel b tel que $\sigma(b) = a$. Ainsi comme pour tout $x \in P, x < a$ on aurait $x < \sigma(b) = b + 1$ et donc $x \leqslant b$. Ceci ayant lieu pour tout x de P, on conclurait que $b \in M$ avec $b < a$ ce qui contredirait le fait que a est le plus petit élément de M.

Exercice

Donner une démonstration de l'assertion (i) en supposant par l'absurde qu'il existe une partie non vide P n'admettant pas de plus petit élément. Montrer alors par récurrence sur l'entier n que, pour une telle partie, la relation $x \in P$ entraîne $x \geqslant n$. Conclure.

Exercice

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné non vide satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème.

1. Montrer que E possède un plus petit élément que l'on note e.
2. Soit x un élément de E.

a. Montrer que l'ensemble $]x, \rightarrow[$ constitué des éléments y tels que $x < y$ est non vide. En déduire que l'intervalle $]x, \rightarrow[$ a un plus petit élément noté $x^\star$. Vérifier qu'il n'y a pas d'élément de E entre x et $x^\star$. En déduire que l'application $x \mapsto x^\star$ est une injection de E dans $E \setminus \{e\}\cdot$

b. Dans le cas où x est différent de e, vérifier que l'intervalle $[e, x[$ constitué des éléments y tels que $y < x$ est majoré. On note ${}^\star x$ le plus grand élément de $[e, x[$. Vérifier que $({}^\star x)^\star = x$.

3. Soit P une partie de E telle que $e \in P$ et que la relation $x \in P$ implique $x^\star \in P$, montrer que $P = E$.

4. Conclure de cette étude que l'ensemble E est isomorphe à l'ensemble $\mathbb{N}$.

6. Théorème. Principe de récurrence sur tous les prédécesseurs

Soit P une partie de $\mathbb{N}$ telle que la relation $[0, x[\subset P$ implique $x \in P$. Alors $P = \mathbb{N}$.

En effet, si $P \neq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus P$ possède un plus petit élément x et $[0, x[\subset P$. On obtient ainsi une contradiction avec l'hypothèse.

On déduit de ce théorème

- le principe de récurrence à partir de l'entier naturel n_0.
- le principe de récurrence sur tous les prédécesseurs à partir du rang n_0.

V. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

1. Théorème et définition

> *Étant donné deux entiers naturels a et b, l'entier b étant supposé non nul, il existe un couple (q, r) et un seul d'entiers naturels tel que $a = bq + r$ et $r < b$. Les entiers q et r s'appellent respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de a par b. L'entier a est appelé le **dividende** et l'entier b le **diviseur**.*

Unicité : supposons l'existence d'un tel couple (q, r), alors $bq \leqslant a < b(q + 1)$. Par suite, pour tout entier k tel que $k \geqslant q + 1$, l'entier a est strictement inférieur à kb et donc q est le plus grand des entiers naturels k tels que bk soit inférieur ou égal à a. Cela prouve l'unicité de q ; l'unicité de r en découle.

Existence : Introduisons l'ensemble $\mathcal{P}$ constitué des entiers naturels p tels que $bp \leqslant a$. Il est non vide car il contient 0 ; de plus, puisque $b \geqslant 1$, pour tout entier k tel que $k \geqslant a + 1$, on a $bk \geqslant ba + b > a$; cela montre que $\mathcal{P}$ est majoré par $(a + 1)$. D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}$ admet un plus grand élément que l'on note q. Ainsi, $bq \leqslant a < b(q + 1)$. Pour achever la preuve, il suffit de poser $r = a - bq$.

On note $a \operatorname{div} b$ (*resp.* $a \bmod b$) le quotient (*resp.* le reste) de la division euclidienne de a par b.

2. Propriétés de la division euclidienne

> (i) $\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ ka \operatorname{div} kb = a \operatorname{div} b,$
>
> (ii) $\forall c \in \mathbb{N}^\star,\ (a \operatorname{div} b) \operatorname{div} c = a \operatorname{div} bc,$
>
> (iii) $\forall b \in \mathbb{N}^\star,\ a \leqslant a' \Rightarrow a \operatorname{div} b \leqslant a' \operatorname{div} b,$
>
> (iv) $\forall a \in \mathbb{N},\ b \geqslant b' \Rightarrow a \operatorname{div} b \leqslant a \operatorname{div} b',$
>
> (v) *a est divisible par b ie. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$, si, et seulement si, le reste dans la division euclidienne de a par b est nul.*

VI. Propriétés des intervalles $[\![0, n[\![$ où $n \in \mathbb{N}$

1. Proposition

> *Soient m et n deux entiers naturels distincts. Il n'existe pas de bijection de $[\![0, m[\![$ sur $[\![0, n[\![$*

Quitte à échanger m et n on peut supposer $n < m$. On établit alors l'assertion par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, l'assertion est immédiate puisqu'aucune bijection ne peut appliquer l'ensemble vide $[0, 0[$ sur l'ensemble non vide $[0, m[$. Prenons maintenant pour hypothèse de récurrence que l'assertion est valable pour un entier n strictement positif donné et pour tout entier $m > n$. Considérons alors l'ensemble $[0, n + 1[= [0, n[\cup\{n\}$ et supposons par l'absurde que pour un entier $m > n + 1$, il existe une bijection f de $[0, n + 1[$ sur $[0, n[$. Quitte à composer à gauche l'application f par la bijection de $[0, m[$ sur lui-même qui échange les entiers naturels k et $m + 1$ où k est l'entier naturel tel que $f(k) = m - 1$ et qui fixe les autres entiers, on peut supposer que $f(n+1)=m$. Il en découle que la restriction de f où $[0,n[$ définit une bijection de $[0,n[$ sur $[0,m-1[$ avec $n<m-1$, contrairement à l'hypothèse de récurrence.

2. Proposition

Soit n un entier naturel non nul. Alors

(i) *toute injection de $[0,n[$ dans lui-même est une surjection,*

(ii) *toute surjection de $[0,n[$ sur lui-même est injective.*

(i) On effectue la démonstration par récurrence sur l'entier naturel n. Pour $n=1$, l'assertion est banale puisque $[0,n[$ est réduit à $\{0\}\cdot$ Supposons l'assertion vraie pour un entier $n\geqslant 1$ et considérons une injection f de $[0,n+1[$ dans lui-même. On se ramène au cas où $f(n)=n$ en composant à gauche dans le cas où $f(n)=k\neq n$ l'application f par l'application qui échange les entiers k et n et qui fixe tous les autres. La restriction de f à $[0,n[$ est alors une application injective de $[0,n[$ dans lui-même. On en déduit que la restriction de f à $[0,n[$ est bijective et comme $f(n)=n$, l'assertion en découle.

On laisse au lecteur le soin d'établir l'assertion (ii).

B. Ensembles finis et infinis

On dit que deux ensembles sont **équipotents** s'ils peuvent être mis en bijection.

I. Définitions et premières propriétés

1. Définition

Un ensemble est dit fini s'il n'est équipotent à aucune de ses parties strictes. Un ensemble est dit infini s'il n'est pas fini.

Exemples

1. L'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini.

2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est infini : en effet l'application succession σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^\star$ qui est une partie stricte de $\mathbb{N}$.

2. Propriétés

1. Si un ensemble X est équipotent à un ensemble fini (*resp.* infini) il est lui-même fini (*resp.* infini).

2. Si X est un ensemble fini, toute partie Y de X est finie.

Soit en effet Y une partie de X et supposons par l'absurde que Y soit ne soit pas finie. Il existe donc une partie Z de Y et une application f de Y dans Z qui soit bijective. On définit alors une application F de X ans la partie stricte $Z\cup(X\setminus Y)$ de X en posant $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in Y \\ x & \text{si } x\in X\setminus Y\end{cases}$. Il est alors immédiat que F définit une bijection de X dans la partie stricte $Z\cup(X\setminus Y)$ de X.

3. Soient X un ensemble fini et y un élément, l'ensemble $X\cup\{y\}$ est un ensemble fini.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une bijection f de $X\cup\{y\}$ dans une partie stricte Z de $X\cup\{y\}$.

• ou bien $f(X) \subset X$ et f induit une bijection de X sur $f(X)$ nécessairement, $f(y) = y$ et donc comme $f\big(X \cup \{y\}\big) = f(X) \cup f(\{y\}) = X \cup \{y\}$ ce qui contredit le fait que Z est une partie stricte de $X \cup \{y\}$.

• ou bien il existe $a \in X$ tel que $f(a) = y$ et comme f est une bijection, nécessairement $f(y) \neq y$; il en résulte que l'élément $b = f(y)$ appartient à X. Soit alors g l'application de X dans lui-même définie par les formules

$$g(a) = b,\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in X \setminus \{a\}\cdot$$

L'application g est clairement injective. De plus si l'on suppose que $g(X) = X$ pour tout x de X, il existe $\xi \in X$ tel que $x = g(\xi)$; dans ces conditions, $\xi \neq a, x = f(\xi)$ et x appartient à Z et si $\xi = a, x = b = f(y)$ et x appartient à Z. Enfin comme $f(x) = y$, y appartient à Z et donc l'hypothèse $g(X) = X$ entraîne $Z = X \cup \{y\}$ ce qui n'est pas. Il s'ensuit que $g(X)$ est une partie stricte de X équipotente à X contrairement à l'hypothèse.

Conséquence

Pour tout entier naturel n, l'ensemble $[0, n[$ est un ensemble fini.

En effet, si $n = 0, [0, n[= \emptyset$ et s'il est fini, il en est de même de $[0, n+1[$ puisque $[0, n+1[= [0, n[\cup \{n\}\cdot$

3. Théorème

| *Tout ensemble fini est équipotent à un ensemble* $[0, n[$ *et un seul.*

Existence : supposons qu'un ensemble X soit non équipotent à un ensemble $[0, n[$ où $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que l'on peut construire une injection de $\mathbb{N}$ dans X *ie.* une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sans répétition de points de X ce qui montrera que X est un ensemble infini. Pour cela on procède par récurrence sur l'ensemble des prédécesseurs. Supposons donc les x_p construits pour $p < n$. Si l'ensemble des x_p où p parcourt $[0, n[$ était égal à X, il en résulterait une bijection de $[0, n[$ sur X ce qui contredirait l'hypothèse. Ainsi il existe au moins un élément de X différent des x_p où $p < n$. Choisissons en un que l'on note x_n. (Le lecteur aura noté, ici l'utilisation de l'axiome du choix). La famille $(x_p)_{0 \leqslant p < n+1}$ est encore sans répétition, ce qui achève la preuve.

Unicité : si l'ensemble fini X est équipotent à deux ensembles $[0, n[$ et $[0, m[$ où m et n appartiennent à $\mathbb{N}$, ces ensembles $[0, n[$ et $[0, m[$ sont équipotents et donc, d'après ce qui précède $n = m$.

L'entier n est le nombre **cardinal** de X on le note $\mathrm{Card}(X)$.

II. Cardinaux des ensembles finis

1. Caractérisation des ensembles finis

Soit X un ensemble. les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est fini ;

(ii) toute surjection de X sur lui-même est injective ;

(ii) toute injection de X dans lui-même est surjective.

2. Opérations sur les cardinaux

Soient X et Y deux ensembles finis.

1. L'ensemble $X \cup Y$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(X \cup Y) \leqslant \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y)$ avec égalité si $X \cap Y = \emptyset$.