Chapitre 1

Ensembles dénombrables

L'un des concepts fondamentaux en mathématiques, est la notion de cardinal d'un ensemble E, noté $\mathrm{card}(E)$, introduite par George Cantor. Pour les ensembles finis, la définition de cardinal ne présente pas de difficulté. Intuitivement, c'est le nombre d'éléments d'un ensemble. Deux ensembles finis ont le même cardinal s'ils contiennent le même nombre d'éléments. La notion devient moins intuitive lorsqu'on considère des ensembles infinis.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \to F$. On vérifie sans peine que :

- E et E sont équipotents (l'application identité de E est une bijection).
- Si E et F sont équipotents alors F et E sont équipotents (la réciproque d'une bijection est une bijection).
- Si E et F sont équipotents et F et G sont équipotents alors E et G sont équipotents (par composition de bijections).

Nous adoptons donc cette définition : deux ensembles (finis ou infinis) *ont même cardinal* (*taille*) s'ils sont équipotents. Un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier n, qui est unique, tel que E et l'ensemble $\{1, 2, .., n\}$ sont équipotents. Autrement dit, E est fini si E a la même taille qu'une partie finie de $\mathbb{N}$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux **ensembles qui sont, à une bijection près, des parties infinies de** $\mathbb{N}$.

1.1 Dénombrabilité

Définition 1 *Un ensemble E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Soit E un ensemble dénombrable. Choisir une bijection de $\mathbb{N}$ dans E revient à énumérer les éléments de E, c'est-à-dire écrire

$$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

sous la forme d'ensemble des valeurs d'une suite injective $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2 *Un ensemble E est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Exemple : L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On peut expliciter des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, par exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Il est simple aussi de démontrer que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ est dénombrable, puisque l'application $n \mapsto n+1$ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$. Plus généralement, on démontre que les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables.

Proposition 3 *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'existence du minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ permet de construire l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$f(0) = \min \mathcal{A} \text{ et } f(n) = \min \mathcal{A}\setminus\{f(0), f(1), .., f(n-1)\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)$ existe, puisque l'ensemble $\mathcal{A}\setminus\{f(0), f(1), .., f(n-1)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Par construction, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, ce qui montre que f est injective. Soit $x \in \mathcal{A}$. La stricte croissance de la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$. Il existe un entier k tel que $f(k) \geq x$. Posons

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : f(k) \geq x\}.$$

Alors, $x = f(k_0)$. En effet, par définition de k_0, $f(k_0) \geq x$. D'autre part, comme

$$x \in \mathcal{A}\setminus\{f(0), f(1), .., f(k_0-1)\} \text{ et } f(k_0) = \min \mathcal{A}\setminus\{f(0), f(1), .., f(k_0-1)\},$$

on en déduit que $f(k_0) \leq x$. D'où $f(k_0) = x$. Ce qui montre la surjectivité de l'application f. ■

Comme conséquence du résultat précédent on a :

Corollaire 4 *Un ensemble non vide est au plus dénombrable si, et seulement si, il est en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$.

Exemple 5 *L'ensemble* $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable, puisqu'il est infini et l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (n, m) & \mapsto & 2^n(2m+1) \end{array}$$

est bijective car tout entier strictement positif s'écrit d'une façon unique comme produit de puissance de 2 *et d'un entier impair.*

Le théorème suivant donne une méthode pratique pour montrer la dénombrabilité d'un ensemble donné.

Théorème 6 *Soit* E *un ensemble non vide. Alors on a équivalence :*

1. *L'ensemble* E *est au plus dénombrable.*
2. *Il existe une surjection de* $\mathbb{N}$ *dans* E.
3. *Il existe une injection de* E *dans* $\mathbb{N}$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$(2). Supposons que E est au plus dénombrable. Il existe, alors, une bijection $f : \mathbb{N} \to E$ ou une bijection $f : \{1, 2, ..n\} \to E$ avec n un entier naturel. Dans le premier cas f est une surjection de $\mathbb{N} \to E$. Dans le second cas, fixons $a \in E$ et définissons l'application $g : \mathbb{N} \to E$ par $g(k) = f(k)$ si $k \in \{1, 2, ..n\}$ et $g(k) = a$ sinon. Il est clair que g est une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

(2) $\Rightarrow$(3). Soit $f : \mathbb{N} \to E$ une surjection. Pour tout $x \in E$, l'ensemble

$$f^{-1}(\{x\}) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\}$$

est non vide, soit $n_x = \min f^{-1}(\{x\})$. L'application g définie par

$$\begin{array}{rcl} g : E & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & n_x \end{array}$$

est clairement injective.

(3) $\Rightarrow$(1). Soit $f : E \to \mathbb{N}$ une application injective, alors f est en bijection avec $f(E)$ qui est une partie de $\mathbb{N}$, par conséquent E est un ensemble au plus dénombrable. ■

On peut remplacer dans le théorème 6, l'ensemble $\mathbb{N}$ par n'importe quel ensemble dénombrable X.

Comme conséquence on a les résultats suivants.

Corollaire 7 *Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.*

Preuve. Si A est une partie non vide d'un ensemble au plus dénombrable E. Il existe une application injective $f : E \to \mathbb{N}$, la restriction de f à A est encore injective. ■

Proposition 8 *Le produit de deux ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

Preuve. Soit E et F deux ensembles au plus dénombrables. Si E ou F est vide alors $E\times F$ est vide. Sinon, soit $f : \mathbb{N} \to E$ et $g : \mathbb{N} \to E$ deux applications surjectives. L'application

$$\begin{array}{rcc} g : \mathbb{N}^2 & \to & E \times F \\ (n,m) & \mapsto & (f(n), g(m)) \end{array},$$

est surjective. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (voir exemple 5), on en déduit que $E\times F$ est au plus dénombrable. ■

Par récurrence, on montre que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. En particulier, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Exemple 9 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En effet, le produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable et l'application*

$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{Q} \\ (n,m) & \mapsto & \dfrac{n}{m} \end{array}$$

est surjective.

Exemple 10 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{Q}^p$ est dénombrable, comme produit fini des ensembles dénombrables. L'ensemble $\mathbb{Q}_p[X]$ des polynômes de degré au plus p est en bijection avec $\mathbb{Q}^{p+1}$ par suite $\mathbb{Q}_p[X]$ est dénombrable.*

Proposition 11 *Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve. Soit I un ensemble au plus dénombrable et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables. On peut supposer que les E_i sont non vides (sinon, on peut supprimer les ensembles E_i qui sont vides, ce qui ne change pas la réunion). Pour tout $i \in I$, il existe une application surjective $f_i : \mathbb{N} \to E_i$.

Soit a un élément de $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$. Il existe $i \in I$ tel que $a \in E_i$, par suite il existe un entier $j \in \mathbb{N}$ tel que $a = f_i(j)$. Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : I \times \mathbb{N} & \to & \bigcup\limits_{i\in I} E_i \\ (i,j) & \mapsto & f_i(j) \end{array}$$

est surjective. Comme $I \times \mathbb{N}$ est au plus dénombrable d'après la proposition 8, il en est de même de $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$, (cf. théorème 6). ■

Exemple 12 *L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ (respectivement, $\mathbb{Z}[X]$) des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (respectivement, dans $\mathbb{Z}$) est dénombrable. En effet, on a : $\mathbb{Q}[X] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ (respectivement, $\mathbb{Z}[X] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$).*

Exemple 13 *Un nombre réel α est dit algébrique s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques. Alors l'ensemble $\mathcal{A}$ est dénombrable.*
En effet, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ l'ensemble

$$\mathcal{Z}(P) = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$$

est fini. Comme $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{P\in\mathbb{Z}[X]} \mathcal{Z}(P)$, qui est réunion dénombrable d'ensembles finis, $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable. L'ensemble $\mathcal{A}$ est infini (il contient $\mathbb{Z}$) donc $\mathcal{A}$ est dénombrable.

1.2 Suite exhaustive de parties finies

Soit E un ensemble non vide.

Définition 14 *Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite exhaustive de parties finies** si chaque J_n est finie, $J_n \subseteq J_{n+1}$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n = E$.*

- La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $J_n = \{0, 1, 2, .., n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{N}$.
- La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $J_n = \{k \in \mathbb{N} : -n \leq k \leq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{Z}$.

– La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $J_n = \{0,1,2,..,n\} \times \{0,1,2,..,n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{N}^2$. Une autre suite exhaustive de $\mathbb{N}^2$ est la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$J_n = \{(p,q) : p + q \leq n\}.$$

Le théorème suivant caractérise la dénombrabilité en termes de suites exhaustives.

Théorème 15 *Un ensemble E est au plus dénombrable si, et seulement si, E possède une suite exhaustive de parties finies.*

Preuve. Si E est fini alors on pose $J_n = E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si E est dénombrable, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$. On définit l'ensemble J_n, pour tout entier n, par $J_n = f(\{0,1,2,..,n\})$. Alors $(J_n)_{n\in\ \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de parties finies de E. Inversement, soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive des parties finies. Comme $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ et chaque J_n est au plus dénombrable, d'après la proposition 11, E est au plus dénombrable. ■

Comme application, on redémontre que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbb{Q}_n = \left\{ \frac{p}{q} : |p| \leq n, |q| \leq n+1, q \neq 0 \right\}$$

Chaque partie $\mathbb{Q}_n$ est clairement finie, $\mathbb{Q}_n \subseteq \mathbb{Q}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}$. Comme de plus $\mathbb{Q}$ est infini, il est dénombrable.

1.3 Exemples de parties non dénombrables

Théorème 16 *L'ensemble $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable.*

Comme un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable (cf corollaire 7), il suffit, pour montrer le théorème, de démontrer que $]0,1[$ est non dénombrable. On donne deux démonstrations de ce résultat, une troisième preuve est donnée en exercice (voir exercice 1).

Preuve. 1. Supposons que $]0,1[$ est dénombrable. On peut donc trouver une bijection $n \mapsto x_n$ de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$, en particulier

$$]0,1[= \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tout réel $x_n \in \,]0,1[$ admet un unique développement décimal propre de la forme,

$$x_n = 0, a_{1,n}a_{2,n}..a_{n,n}a_{n,n+1}..$$

où la suite $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\{0,1,2,..9\}$ et n'est pas stationnaire en 9. On va construire un réel $x \in \,]0,1[$ qui ne peut pas être l'un des x_n. Considérons le réel

$$x = 0, b_1b_2 \dots b_n \dots$$

avec $b_n = 1$ si $a_{n,n} = 2$ et $b_n = 2$ si $a_{n,n} \neq 2$. Alors $x \in \,]0,1[$ et $x \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Contradiction. ■

Preuve. 2. On démontre, par l'absurde, que le segment $J_0 = [0,1]$ est non dénombrable. Sinon, J_0 peut s'écrire sous la forme :

$$[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

On écrit : $J_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Au moins l'un des trois segments

$$[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \text{ ou } [\frac{2}{3}, 1]$$

ne contient pas x_0. Notons J_1 ce segment. De même, en coupant J_1 en trois segments de même longeur on construit un segment J_2 inclus dans J_0 qui ne contient pas x_0 et x_1 et de longeur $\frac{1}{9}$. En utilisant ce procédé, on construit ainsi une suite de segments décroissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la longeur de $J_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n ne contient pas $x_0, x_1, ..x_n$. Donc, par hypothèse, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ est vide. Or, une suite décroissante de segments dont la diamètre tend vers 0 est d'intersection non vide. Contradiction. ■

Comme conséquences, on a :

Corollaire 17 *L'ensemble des irrationnels* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est non dénombrable.*

Preuve. Sinon, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ serait dénombrable. ■

Corollaire 18 *Tout intervalle non réduit à un point est non dénombrable.*

Preuve. On a montré que $]0,1[$ est non dénombrable. Or, tout intervalle $]a,b[, a$ et $b \in \mathbb{R}$, est équipotent à $]0,1[$. En effet l'application $t \mapsto tb + (1-t)a$ est une bijection de $]0,1[$ dans $]a,b[$. Donc, $]a,b[$ est non dénombrable. Soit I un intervalle non réduit à un point, alors I contient un intervalle ouvert de type $]a,b[,\ a < b \in \mathbb{R}$ donc I est non dénombrable. ■

Corollaire 19 *Il existe des nombres réels transcendants (non algébriques).*

Preuve. Sinon, on aurait $\mathbb{R} = \mathcal{A}$, l'ensemble des réels algébriques, donc $\mathbb{R}$ serait dénombrable d'après l'exemple 13. ■

Notons, que l'ensemble des réels transcendants est infini non dénombrable. Donc la "plupart" des réels sont transcendants mais on en connaît peu. On sait, par exemple que $e, \pi, \ln(2)$ sont transcendants.

Corollaire 20 *$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.*

Preuve. Sinon $\mathbb{R}$ serait isomorphe a $\mathbb{Q}^n$, avec $n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^n$ qui est dénombrable. Contradiction. ■

Théorème 21 *L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est non dénombrable.*

La preuve de ce théorème est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 22 *(**Cantor**) Soit E un ensemble. Alors E et $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, ne sont pas en bijection.*

Preuve. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application et A l'ensemble défini par

$$A = \{x \in E : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$$

Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $f(y) = A$. Par définition de A on a :

$$y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) \Leftrightarrow y \notin A$$

Ce qui est absurde. Ce qui montre que f n'est pas surjective donc il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$. ■

Le lemme de Cantor affirme que, pour tout ensemble E, il n'existe pas de surjection (et *a fortiori* de bijection) de E sur $\mathcal{P}(E)$. Noter qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$, a savoir l'application $x \mapsto \{x\}$, donc E est en bijection avec une partie stricte de $\mathcal{P}(E)$. On dit que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est plus grand que celui de E.

Corollaire 23 *L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, est non dénombrable.*

Preuve. L'application

$$\begin{array}{rcc} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \mapsto & u \text{ définie par} \begin{cases} u_n = 1 \text{ si } n \in A \\ u_n = 0 \text{ sinon} \end{cases}, \end{array}$$

est une bijection. ■