Notations

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.
On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $\mathcal{R}$, d'origine O.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes ; les parties II et III utilisent les notations $R(z)$ et $V_n(z)$ introduites dans la première partie.

Première partie

I.A – Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y, tels que $(x, y) \notin \mathbb{R}_- \times \{0\}$.
On note $\theta(z) = 2 \arctan \left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ et $R(z) = \dfrac{z + |z|}{\sqrt{2\big(\Re e(z) + |z| \big)}}$.

I.A.1) Justifier que θ et R sont bien définies.

I.A.2) Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2i$ et $z_3 = -i\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $\big(R(z)\big)^2$.

I.A.3) Vérifier que $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ et $R(z) \in \mathcal{P} = \big\{ Z \in \mathbb{C} \bigm| \Re e(Z) > 0 \big\}$.

I.A.4) Représenter sur une figure le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.
En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \operatorname{Arg}(z) = 2 \operatorname{Arg}\big(z + |z|\big)$$

où $\operatorname{Arg}(z)$ désigne la détermination principale de l'argument du nombre complexe z.

I.A.5) Déterminer $\big(R(z)\big)^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2} e^{i\theta(z)/2}$ en fonction de z, $R(z)$ et $\theta(z)$.

I.A.6) Résoudre à l'aide de R l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

I.A.7) En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ dans $\mathcal{P}$. Préciser sa bijection réciproque.

Dans la suite du problème, on prolonge R à $\mathbb{C}$ en posant $R(x) = i\sqrt{|x|}$ si $x \in \mathbb{R}_-$.

I.B – Soient a et b deux nombres complexes tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On dit qu'une suite complexe $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(E_{a,b})$ si l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2a u_{n+1} + b u_n$.

I.B.1) On suppose que $a^2 + b \neq 0$. On note $d = R(a^2 + b)$. On appelle W la suite $W = \big((a + d)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et W' la suite $W' = \big((a - d)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W, W')$.
Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, en fonction de d, W et W'.

I.B.2) On suppose que $a^2 + b = 0$ et $a \neq 0$. On note W et W' les suites $W = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W' = (na^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W, W')$.
Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ en fonction de a, W et W'.

Dans la suite du problème, on note :
- $U(a, b) = \big(U_n(a, b)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $U_0(a, b) = 0$ et $U_1(a, b) = 1$;
- $V_n(z) = U_{n+1}(z, -1)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

I.B.3) Expliciter $V_1(z), V_2(z), V_3(z)$ et déterminer leurs racines dans $\mathbb{C}$.

I.B.4) Montrer que, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n-2j} (-1)^j \qquad \text{(I.1)}$$

On pourra procéder par récurrence.

Deuxième partie

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note C_z (respectivement Ω_z) l'ensemble des points du plan d'affixe complexe Z tels que $|Z(Z - 2z)| = 1$ (respectivement $|Z(Z - 2z)| < 1$).

II.A – Dans cette question on suppose que z est un réel noté a.
On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$ de centre O' d'affixe a, déduit de $\mathcal{R}$ par translation.

II.A.1) Montrer qu'une équation de la courbe C_a en « coordonnées polaires (ρ, θ) » dans le repère $\mathcal{R}'$ est $(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2\rho^2\cos^2(\theta) = 1$.

II.A.2) Simplifier cette équation lorsque $a = 1$. Étudier et tracer l'allure de la courbe C_1.

II.B – On suppose à nouveau z complexe quelconque.

II.B.1) Justifier que Ω_z est une partie bornée du plan. Est-elle ouverte ? fermée ? compacte ?

II.B.2) Justifier que l'origine O est un point intérieur à Ω_z.

II.C – On reprend dans cette question la notation R introduite dans la première partie à la question I.A.

II.C.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \neq 1$. On note
$r = |R(z^2-1)|,\ s = |z + R(z^2-1)|,\ t = |z - R(z^2-1)|,\ h = \max(s,t)$.
Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big|V_n(z)\big| \leqslant \dfrac{h^{n+1}}{r}\cdot$

II.C.2) Que dire du rayon de convergence de la série entière $Z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} V_n(z) Z^n$? On note g_z sa somme.

II.C.3) Lorsque cela a un sens, calculer $(1 - 2zZ + Z^2) g_z(Z)$.

II.C.4) Déterminer l'ensemble de définition D_z de la fonction $Z \mapsto \dfrac{1}{1 - 2zZ + Z^2}$.

II.C.5) Montrer qu'il existe un disque ouvert non vide Δ de centre O inclus dans Ω_z tel que

$$\forall Z \in \Delta,\ \frac{1}{1-2zZ+Z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(z) Z^n = \sum_{p=0}^{\infty} \big(Z^p (2z - Z)^p\big).$$

II.C.6) En déduire que la fonction de la variable réelle x

$$G_z : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \big(x^p (2z - x)^p\big)$$

admet un développement limité à tout ordre en 0. On le note

$$G_z(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad x \to 0.$$

Déterminer les coefficients a_k pour $k \in \mathbb{N}$.

II.C.7) Retrouver alors la relation (I.1).

Troisième partie

On note :
- α un réel tel que $\alpha > -1/2$;
- E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles ;
- F_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, où $n \in \mathbb{N}$;
- φ_α l'application qui, à toute fonction y de E, associe la fonction
$$\varphi_\alpha(y) : t \mapsto (1-t^2) y''(t) - (2\alpha+1) t y'(t) \ ;$$
- S_α l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$S_\alpha(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) (1-t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dt.$$

III.A –

III.A.1) Vérifier que S_α est un produit scalaire sur E.

III.A.2) Justifier que φ_α est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

III.A.3) Montrer que $\forall (f,g)\in E^2,\ S_\alpha\big(\varphi_\alpha f), g\big) = S_\alpha\big(f, \varphi_\alpha(g)\big)$.
On pourra calculer la dérivée de $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} f'(t)$.

III.B – Soit $n \in \mathbb{N}$.
III.B.1) Justifier que φ_α induit sur F_n un endomorphisme et que cet endomorphisme induit (encore noté φ_α) est diagonalisable.

III.B.2) Montrer qu'il existe une base de F_n constituée de vecteurs propres de φ_α de degrés deux à deux distincts.

III.B.3) Vérifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont associés à des valeurs propres distinctes.
On pourra s'intéresser au coefficient dominant d'un polynôme judicieux.

III.B.4) Justifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont orthogonaux.

III.B.5) Montrer que tout vecteur propre de φ_α de degré supérieur ou égal à 1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

III.C – Dans cette partie, on suppose $\alpha = 1$.
On note $\|\cdot\|$ la norme associée à S_α.
III.C.1) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme vecteur propre de φ_1 de degré k, de norme 1 et de coefficient dominant positif. On le note T_k.

III.C.2) Soit $t \in]0,\pi[$. Montrer que la fonction

$$H_t : x \mapsto \frac{1}{1-2x\cos(t)+x^2}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

III.C.3) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,\pi[,\ V_n\big(\cos(t)\big) = \frac{\sin\big((n+1)t\big)}{\sin(t)}.$$

III.C.4) En dérivant deux fois $t \mapsto \sin(t) V_n\big(\cos(t)\big) - \sin\big((n+1)t\big)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est vecteur propre de φ_1.

III.C.5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n et T_n sont proportionnels. Expliciter le coefficient de proportionnalité.

III.C.6) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer les racines de T_n.

Solution

Partie I

I.A -
I.A.1) $z \notin \mathbb{R}_- \Rightarrow x + \sqrt{x^2+y^2} > x + |x| \geqslant 0$ *i.e.* $\Re e(z) + |z| > 0$ d'où les existences de $\theta(z)$ et $R(z)$.
I.A.2) $R(z_1) = 2,\ R^2(z_1) = z_1$ et $\theta(z_1) = 2\arctan(0) = 0$.
$R(z_2) = 1+i,\ R^2(z_2) = z_2$ et $\theta(z_2) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$
I.A.3) $2\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi,\pi[$ donc $\theta(z) \in]-\pi,\pi[$.
$\Re e\big(R(z)\big) = \sqrt{\dfrac{\Re e(z)+|z|}{2}} > 0$ et donc $R(z) \in \mathcal{P}$.
I.4) La figure est immédiate.
Posons $\alpha = \operatorname{Arg}(z)$.
tOn a $\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} = \dfrac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot$
Comme $\left|\dfrac{\alpha}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$ on a $2\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = \alpha$ *i.e.* $\theta(z) = \alpha$.
$z+|z| = |z|\big[1+e^{i\alpha}\big] = 2|z|\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ d'où $\operatorname{Arg}(z+|z|) = \dfrac{\alpha}{2}\cdot$
En définitive $\theta(z) = \operatorname{Arg}(z) = 2\operatorname{Arg}(z+|z|)$ et $\big|z+|z|\big| = 2|z|\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot$
I.A.5) Les calculs précédents montrent que $R(z) = \dfrac{2|z|\cos(\alpha/2)}{\sqrt{2|z|(1+\cos(\alpha))}}$ soit $R(z) = |z|^{1/2}e^{i\alpha/2} = |z|^{1/2}e^{i\theta(z)/2}$ et donc $R^2(z) = z,\ (\theta\circ R)(z) = \theta(z)/2$.
I.A.6) $R(z)$ est solution de $Z^2 = z$ donc $Z^2 = z \iff Z \in \{-R(z), R(z)\}\cdot$
I.A.7) On a déjà vu que R est à valeurs dans $\mathcal{P}$.
$R(z) = R(z') \Rightarrow R^2(z) = R^2(z')$ *i.e.* $z = z'$, d'où l'injectivité de R.
Enfin si $Z \in \mathcal{P}$ alors $Z^2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$; Posons $z = Z^2$.
Comme $\big|\theta(Z)\big| < \dfrac{\pi}{2}$ on a $\theta(z) = 2\theta(Z)$ et $R(z) = |z|^{1/2}e^{i\theta(z)/2} = Z$ donc $R(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-) = \mathcal{P}$.
En résumé R réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ sur $\mathcal{P}$.

I.B - On rappelle que l'ensemble $S_{a,b}$ des suites vérifiant $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.
I.B.1) L'équation $z^2 = 2az + b$ a pour discriminant $4(a^2+b)$ et donc pour solutions $a+d$ et $a-d$. Si $\varepsilon \in \{-1,1\}$ posons $\lambda = a + \varepsilon d$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda^{n+2} - 2a\lambda^n - b\lambda^n = \lambda^n\big[\lambda^2 - 2a\lambda - b\big] = 0$, ce qui montre que W et W' vérifient $E_{a,b}$.
Si $\alpha W + \beta W' = 0$ alors, en utilisant les deux premiers termes on obtient $\alpha+\beta = 0$ et $(\alpha+\beta)a + (\alpha-\beta)d = 0$ d'où $\alpha = \beta = 0$ car $d \neq 0$.

(W, W') est une famille libre dans $S_{a,b}$ donc c'est une base.
Si $U = \alpha W + \beta W'$ alors, de la même façon, $\alpha + \beta = 0$ et $(\alpha - \beta)d = 1$ d'où $U = \dfrac{W - W'}{2d}\cdot$

I.B.2) Cette fois $b = -a^2$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} - 2aW_{n+1} + a^2 W_n = a^{n+2} - 2a \times a^{n+1} + a^2 \times a^n = 0$ et, de même, $W'_{n+2} - 2aW'_{n+1} + a^2 W'_n = (n+2)a^{n+2} - 2(n+1)a^{n+2} + na^{n+2} = 0$ d'où $\mathrm{Vect}(W, W') \subset S_{a,b}$ et, si $\alpha W + \beta W' = 0$ les deux premiers termes donnent $\alpha = 0$ et $\alpha + \beta = 0$ d'où $S_{a,b} = \mathrm{Vect}(W, W')$.
Immédiatement $U = \dfrac{W'}{a}\cdot$

I.B.3) $V_{-1}(z) = 0,\ V_0(z) = 1$ et, si $n \geqslant -1,\ V_{n+2}(z) = 2zV_{n+1}(z) - V_n(z)$, d'où $V_1(z) = 2z,\ V_2(z) = 4z^2 - 1$ et $V_3(z) = 4z(2z^2 - 1)$.
On comprendra « leurs racines » en tant que racines de polynômes et non en tant que racines carrées mais que c'est ambigu !
V_1 s'annule en 0, V_2 en $\pm 1/2$ et V_3 en 0 et $\pm 1/\sqrt{2}$.

I.B.4) On procède par récurrence comme indiqué, les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont immédiats car on a alors $\lfloor n/2 \rfloor = 0$.
Si la propriété est établie jusqu'à un rang $n + 1$ où $n \geqslant 0$ alors

$$\begin{aligned}
V_{n+2}(z) =& 2zV_{n+1}(z) - V_n(z) \\
=& \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+2-2j}(-1)^j \\
&+ \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{(n+2)-2(j+1)}(-1)^{j+1} \\
=& \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-j}{j} (2z)^{n+2-2j}(-1)^j \\
&+ \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \binom{n+1-j}{j-1} (2z)^{n+2-2j}(-1)^j
\end{aligned}$$

en changeant d'indice dans la deuxième somme.
Si $n = 2p$ alors

$$\begin{aligned}
V_{n+2}(z) =& (2z)^{n+2} + \sum_{j=1}^{p} \left[\binom{n+1-j}{j} + \binom{n+1-j}{j-1} \right] (2z)^{n+2-2j}(-1)^j \\
&+ \binom{p}{p} (2z)^{(n+2)-2(p+1)}(-1)^{p+1} \\
=& \sum_{j=0}^{p+1} \binom{n+2-j}{j} (2z)^{n+2-2j}(-1)^j
\end{aligned}$$

d'après le triangle de Pascal.

Enfin si $n = 2p+1$ on a

$$\begin{aligned}V_{n+2}(z) =& (2z)^{n+2} + \sum_{j=0}^{p}\left[\binom{n+1-j}{j} + \binom{n+1-j}{j-1}\right](2z)^{n+2-2j}(-1)^j \\ & + \binom{p+1}{p+1}(2z)^{n+2-2(p+1)}(-1)^{p+1} \\ =& \sum_{j=0}^{p+1}\binom{n+2-j}{j}(2z)^{n+2-2j}(-1)^j\end{aligned}$$

de la même façon.

Dans tous les cas on a $V_{n+2}(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor (n+2)/2\rfloor}\binom{n+2-j}{j}(2z)^{n+2-2j}(-1)^j$ d'où l'hérédité.

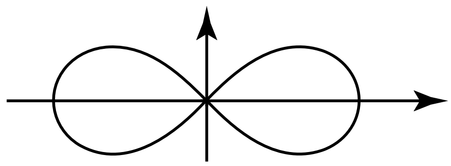
Deuxième partie

II.A -

II.A.1) $Z' = Z - a \iff Z = Z' + a$.
$Z \in \mathcal{C}_a \iff |Z'+a| \times |Z'-a| = 1 \iff |Z'^2 - a^2| = 1$.
Posons $Z' = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \geqslant 0$, alors $Z \in \mathcal{C}_a \iff (\rho^2 e^{2i\theta} - a^2)(\rho^2 e^{-2i\theta} - a^2) = 1$ soit $Z \in \mathcal{C}_a \iff \rho^4 + a^4 - 2a^2\rho^2\cos(2\theta) = 1$ et enfin
$Z \in \mathcal{C}_a \iff (\rho^2 + a^2)^2 - 2a^2\rho^2\big[\cos(2\theta) + 1\big] = 1$ d'où le résultat demandé.

I.A.2) $Z \in \mathcal{C}_1 \iff \rho^4 = 2\rho^2\cos(2\theta) \iff \rho^2 = 2\cos(2\theta)$ car, pour $\theta = \pi/4$ par exemple, on trouve $\rho = 0$.
$\theta \mapsto 2\cos(2\theta)$ est π-périodique, on limite à un intervalle de longueur π et on complète par symétrie de centre O en se limitant à $\rho = \sqrt{2\cos(2\theta)}$. Par parité de cos on se limite à $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et on complète par S_{Ox}.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	$\sqrt{2}$	$+$	0



II.B -

II.B.1) $|Z(Z-2z)| < 1 \Rightarrow |z| < 1$ ou $|Z - 2z| < 1$ et donc Ω_z est bornée car incluse dans l'union des disques ouverts $\mathcal{D}(0,1)$ et $\mathcal{D}(2z,1)$.
Comme $\varphi : Z \mapsto |z(Z-2z)|$ est continue sur $\mathbb{C}$ par produit et composition et comme $\Omega_z = \varphi^{-1}\big(\,]-\infty, 1[\,\big)$, la partie Ω_z est ouverte.
C_z est non vide et formé de points adhérents à Ω_z non dans Ω_z, donc Ω_z n'est pas fermée, et donc non compacte.

II.B.2) Clairement $O \in \Omega_z$ et, comme Ω_z est ouverte, O est un point intérieur (au sens topologique) à Ω_z.

II.C -

II.C.1) Comme $z^2 - 1 \neq 0$ la question **I.B.1** montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(z,-1) = \dfrac{\big[z + R(z^2-1)\big]^n - \big[z - R(z^2-1)\big]^n}{2R(z^2-1)}$ et donc, par inégalité triangulaire, $\big|V_n(z)\big| \leqslant \dfrac{s^{n+1} + t^{n+1}}{2r} \leqslant \dfrac{h^{n+1}}{r}$.

II.C.2) Le rayon est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{h}$ d'après la question précédente.

II.C.3) Pour Z assez petit comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+2}(z) = 2zV_{n+1}(z) - V_n(z)$,
$\sum\limits_{n=2}^{\infty} V_n(z)Z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} V_{n+2}(z)Z^{n+2} = 2zZ \sum\limits_{n=0}^{\infty} V_{n+1}(z)Z^{n+1} - Z^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} V_n(z)Z^n$
soit $g_z(Z) - 1 - 2zZ = 2zZ\big[g_z(Z) - 1\big] - Z^2 g_z(Z)$ d'où $(1 - 2zZ + Z^2)g_z(Z) = 1$.

II.C.4) Les pôles de la fraction rationnelle sont $z \pm R(z^2-1)$, elle est définie sur $\mathbb{C}$ privé de des deux points.

II.C.5) $\mathcal{D}(0, 1/h) \cap \Omega_z$ est ouverte et contient O donc un disque ouvert non vide de centre O ; soit Δ un tel disque.
Si $Z \in \Delta$ la question précédente donne la première égalité et, comme dans Ω_z $|Z(2z - Z)| < 1$ on a $\dfrac{1}{1 - 2zZ + Z^2} = \dfrac{1}{1 - \big(Z(2z - Z)\big)} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \big(Z(2z - Z)\big)^p$,
d'où la deuxième égalité.

II.C.6) G_z est développable en série entière au voisinage de 0 donc admet un développement limité en 0 à tout ordre et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = V_k(z)$.

II.C.7) $\sum\limits_{p=P}^{\infty} \big(x(2z - x)\big)^p = \dfrac{\big(x(2z - x)\big)^P}{1 - 2zx + x^2} \underset{x\to 0}{=} O(x^{2P})$ donc a_k est le coefficient de x^k du polynôme $\sum\limits_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \big(x(2z - x)\big)^p$ ou encore du polynôme
$\sum\limits_{p=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \left(\sum\limits_{j=0}^{p} (-1)^j \dbinom{p}{j} (2z)^{p-j} x^{p+j} \right)$.

Comme $k = p + j \iff p = k - j$ on obtient $a_k = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \dbinom{p-j}{j} (2z)^{p-j}$
et on retrouve ainsi (I.1).

Troisième partie

III.A -

III.A.1) Si $(f,g) \in E^2$ alors $h : t \mapsto f(t)g(t)(1-t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et $h(t) = O\big((1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)$ et, comme $-\alpha + \dfrac{1}{2} < 1$ cela montre que h est intégrable sur $]-1,1[$.