HEC 2007, Voie Technologique

Limite d'intégrales, de matrices, jeu de pile ou face, lois continues

Exercice 1

Le réel e désigne la base du logarithme népérien.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n par la relation suivante, valable pour tout réel x :
$f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ si n est supérieur ou égal à 1, avec $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

On pose, pour tout n de $I\!N$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2.a. Calculer la dérivée de la fonction qui, à tout réel x associe $\ln(1+e^x)$, et en déduire la valeur de u_0.

b. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$, et en déduire la valeur de u_1.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note l sa limite.

4.a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right).$$

b. En déduire la valeur de l.

5.a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\left(1-e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n.$$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k\left(1-e^{-k+1}\right)}{k-1}$.

Exercice 2

Toutes les matrices considérées dans cet exercice sont des matrices carrées d'ordre 3.

On note I la matrice définie par $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, on pose :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, on pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$,

c'est-à-dire que $S_n = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{n!}A^n$.

On pose également $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ lorsque cette limite existe.

1. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. Calculer A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.

c. Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de S_n sous forme de tableau matriciel.

d. En déduire l'expression de la matrice S.

2. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'expression de A^k en fonction de k.

c. Etablir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $S_n = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A$.

d. Donner l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

3. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A^2 - 2A + I$.

b. Etablir, pour tout k de $\mathbb{N}$, la relation : $A^k = kA - (k-1)I$.

c. Donner l'expression de S_n en fonction de A et de I.

d. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} = -\frac{1}{n!}$. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}$.

e. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} = e$.

f. Déduire des questions précédentes, l'expression de S sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis dans un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité P.
Pour tout événement M et tout événement N tel que $P(N) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de M sachant N, notée $P_N(M)$, est donnée par $P_N(M) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}$.
On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M.

1. On considère trois événements A, B, C tels que $P(B) \neq 0$, $P(B) \neq 1$, $P(C) \neq 0$, $P(B \cap C) \neq 0$.

a. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right).$$

b. En déduire alors la formule suivante :

$$P_C(A) = P_{B\cap C}(A)\, P_C(B) + P_{\overline{B}\cap C}(A)\, P_C\left(\overline{B}\right).$$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant $Pile$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et $Face$ avec la probabilité q, où $q = 1 - p$.
On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement :" on obtient $Face$ à l'issue du k-ième lancer ".
$\overline{F_k}$ est donc l'événement : " on obtient $Pile$ à l'issue du k-ième lancer ".
On considère l'événement E : " 2 $Face$ consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 $Pile$ consécutifs".

Par exemple :
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5F_6$, alors E est réalisé;
- si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F_1}F_2F_3\overline{F_4F_5}F_6$, alors E est réalisé;
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4F_5}F_6$, alors $\overline{E}$ est réalisé.

2.a. Donner sans calcul la valeur de $P_{F_1\cap F_2}(E)$.

b. Justifier également sans calcul la relation suivante $P_{F_1\cap\overline{F_2}}(E) = P_{\overline{F_1}}(E)$.

c. En utilisant la relation trouvée à la question **1.b.**, avec $A = E, B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $P_{F_1}(E)$ et $P_{\overline{F_1}}(E)$.

3.a. Que vaut $P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E)$?

b. Montrer que $P_{\overline{F_1}\cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$.

c. Toujours en utilisant la relation de la question **1.b.** appliquée à des événements bien choisis, montrer que $P_{\overline{F_1}}(E) = qP_{F_1}(E)$.

4.a. Déduire des questions **2.** et **3.** les égalités $P_{F_1}(E) = \dfrac{q}{1-pq}$ et $P_{\overline{F_1}}(E) = \dfrac{q^2}{1-pq}$.

b. Calculer $P(E)$ en fonction de p et de q.

5. On note G l'événement : " $2\ Pile$ consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de $2\ Face$ consécutifs".

a. Expliquer comment trouver $P(G)$ sans calcul.

b. Vérifier que $P(E) + P(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 4

Pour toute variable aléatoire Z admettant une espérance et une variance, ces dernières sont notées $E(Z)$ et $V(Z)$ respectivement.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = & ax^2 + b \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ f(x) = & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X dont l'espérance vaut $\dfrac{3}{5}$, si et seulement si $a = \dfrac{6}{5}$ et $b = \dfrac{3}{5}$.

Dans toute la suite, on prendra pour a et b les valeurs données ci-dessus.

2. Calculer la variance de X.

3. Déterminer la fonction de répartition, notée F, de la variable X.

4. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, étant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X, on considère, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire S_n définie par : $S_n = \sup(X_1, X_2, ..., X_n)$, c'est-à-dire telle que pour tout réel x, on a : $[S_n \le x] = ([X_1 \le x] \cap [X_2 \le x] \cap ... \cap [X_n \le x])$.

a. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n, notée F_n, est donnée par :

$$\begin{cases} F_n(x) = & 0 \text{ si } x < 0 \\ F_n(x) = & \left(\dfrac{2x^3+3x}{5}\right)^n \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ F_n(x) = & 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

b. Justifier que $E(S_n) = \displaystyle\int_0^1 x f_n(x)\, dx$, où f_n désigne une densité de S_n.

c. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la formule suivante :

$$E(S_n) = 1 - \int_0^1 F_n(x)\ dx\,.$$

d. Etablir, pour tout x de $[0,1]$, l'inégalité suivante : $F_n(x) \leq \left(\dfrac{3x+2}{5}\right)^n$.

e. Pour tout x de $[0,1]$, on pose $g_n(x) = \left(\dfrac{3x+2}{5}\right)^n$.
Vérifier qu'une primitive G_n de g_n sur $[0,1]$ est donnée par :

$$G_n(x) = \frac{5}{3(n+1)}\left(\frac{3x+2}{5}\right)^{n+1}.$$

f. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(S_n) = 1$.

HEC 2007, Voie Technologique. Corrigé

Exercice 1

1. Pour tout réel x, on a $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{e^{-x}e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{1}{e^{-x}\left(e^{x}+1\right)} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

2.a. Si l'on note, pour $x \in I\!R$, $h(x) = \ln\left(1+e^{x}\right)$, alors h est dérivable sur $I\!R$, et $h'(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$. Ainsi, par **1.**, $h' = f_0$. Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 h'(x)\ dx = \left[h(x)\right]_0^1 = h(1) - h(0)$. Mais $h(1) = \ln(e+1)$, $h(0) = \ln 2$, donc

$$u_0 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}.$$

b. Utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient :
$u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\ dx + \int_0^1 f_1(x)\ dx = \int_0^1 \left(f_0(x) + f_1(x)\right)\ dx$. Mais $f_0(x) + f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$, donc $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 dx = 1$. Il en résulte que :

$$u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\frac{e+1}{2}.$$

N.B.: on peut aussi écrire u_1 sous la forme $u_1 = \ln\dfrac{2e}{e+1}$.

3. Pour tout entier $n \geq 0$, et tout réel x, positif ou nul, on a $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$ (car, par exemple, $e^{-(n+1)x} = e^{-x}e^{-nx}$, et $e^{-x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$), d'où, divisant par $1+e^{-x}$ (positif), $\dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leq \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$, c'est-à-dire $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Intégrant membre à membre cette inégalité de 0 à 1 (bornes en sens croissant), il vient $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\ dx \leq \int_0^1 f_n(x)\ dx$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$, la suite $\left(u_n\right)_{n\in I\!N}$ est donc décroissante.
De plus, comme, clairement, pour tout x, $f_n(x) \geq 0$, la positivité de l'intégrale entraîne que $u_n \geq 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0. Le théorème de convergence monotone permet alors de conclure que (u_n) converge (de plus, sa limite l vérifie $l \geq 0$).

4.a. pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel x, $f_n(x) + f_{n-1}(x) = \dfrac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}$.
Comme $e^{-nx} + e^{-(n-1)x} = e^{-(n-1)x}\left(e^{-x}+1\right)$, on a $f_n(x) + f_{n-1}(x) = e^{-(n-1)x}$.
Intégrant membre à membre cette inégalité de 0 à 1 (bornes en sens croissant), il vient, utilisant à nouveau la linéarité de l'intégrale,
$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx + \int_0^1 f_{n-1}(x)\ dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x}\ dx$. Pour $n \geq 2$, on a
$\displaystyle\int_0^1 e^{-(n-1)x}\ dx = \left[-\frac{1}{n-1}e^{-(n-1)x}\right]_0^1 = \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right)$, et donc, pour tout

entier $n \geq 2$,

$$\int_0^1 e^{-(n-1)x}\, dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right).$$

b. On a, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n-1}$, c'est-à-dire $0 \leq u_n + u_{n-1} \leq \dfrac{1}{n-1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0$, le théorème de l'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + u_{n-1}) = 0$. D'autre part, faisant, dans **a.**, tendre n vers l'infini, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + u_{n-1}) = 2l$. Donc $2l = 0$, d'où $l = 0$.

Remarque : un raisonnement plus direct est possible. Puisque, pour tout réel x, $1+e^{-x} \geq 1$, on a $0 \leq f_n(x) \leq e^{-nx}$. Il en résulte, comme plus haut, que $0 \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\, dx \leq \int_0^1 e^{-nx}\, dx$, et donc, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, le théorème de l'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.a. On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n$.

Pour $n = 2$, cette formule s'écrit $1 - e^{-1} = u_1 + u_2$, et l'on voit que cette formule est vraie comme correspondant au cas $n = 2$ dans la formule obtenue en **4.a.** ($u_n + u_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right)$).

On suppose ensuite que la formule à démontrer est vraie pour un entier $n \geq 2$, quelconque. On a alors :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k\left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}\left(1 - e^{-n}\right)}{n}$$
$$= u_1 + (-1)^n u_n + \frac{(-1)^{n+1}\left(1 - e^{-n}\right)}{n}$$

(en utilisant l'hypothèse de récurrence).

Mais, remplaçant n par $n+1$ dans la formule démontrée en **4.a.**, on voit que $\dfrac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right) = u_{n+1} + u_n$. Donc :

$(-1)^n u_n + \dfrac{(-1)^{n+1}\left(1 - e^{-n}\right)}{n} = (-1)^n u_n + (-1)^{n+1}\left(u_{n+1} + u_n\right) = (-1)^{n+1} u_{n+1}$,

car $(-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_n = 0$ ($(-1)^{n+1} = -(-1)^n$). Reportant plus haut, on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k\left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 + (-1)^{n+1} u_{n+1}$. On voit alors que la formule à prouver est encore vraie pour l'entier $n+1$, et l'on peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n.$$

5.b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_1 + (-1)^n u_n\right) = u_1$, et l'on peut donc écrire

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 = 1 - \ln \frac{e+1}{2}\,.$$

Exercice 2

1. Dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On trouve $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte, par une récurrence immédiate, que pour tout entier $k \geq 3$, $A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Il résulte de **b.** que, pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = I + \dfrac{1}{1!}A + \dfrac{1}{2!}A^2$, c'est-à-dire $S_n = I + A + \dfrac{1}{2}A^2$. Effectuant, on obtient :

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Pour $n \geq 2$, les coefficients de la matrice S_n sont constants. Il en résulte que

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

b. On montre, par récurrence, que, pour tout entier $k \geq 1$, $A^k = 3^{k-1}A$.