Chapitre 1

Géométrie pure

On rappelle que la démarche adoptée dans cette partie est la construction, à partir des acquis des élèves, d'un certain nombre d'outils géométriques nous permettant, d'une part de démontrer les principaux résultats du collège et d'autre part d'élaborer la théorie algébrique nécessaire au passage aux dimensions supérieures.
On démontre en particulier dans cette partie les théorèmes de Thalès et de Pythagore à l'aide des transformations du plan, mais il y a d'autres façon de procéder, par exemple avec les aires (cf. CAPES interne 2000).

On se place dans le "plan usuel" $\mathscr{P}$. Ses éléments sont les points ; des parties de $\mathscr{P}$ appelées droites sont supposées connues, ainsi que la notion de relation d'équivalence et le raisonnement par l'absurde.

1.1 Parallélisme

1.1.1 Axiomes d'incidence

— Par deux points distincts A et B passe une droite et une seule, notée (AB).

— Par un point pris hors d'une droite passe une droite et une seule disjointe de la première (axiome d'Euclide).

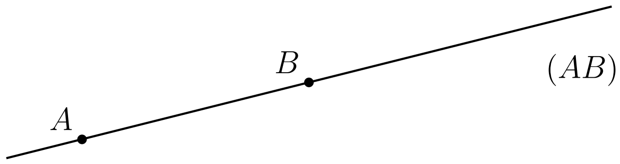

FIGURE 1.1 – droite passant par deux points distincts

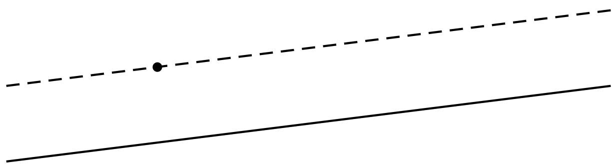

FIGURE 1.2 – axiome d'Euclide

1.1.2 Positions relatives de deux droites

Deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont en commun :

— Soit 2 points : elles sont alors <u>confondues</u> ($\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$) d'après (1.1.1)
— Soit 1 point commun A : on dit qu'elles sont <u>sécantes</u> en A ($\mathscr{D}_1 \bigcap \mathscr{D}_2 = \{A\}$).
— Soit 0 point commun : on dit qu'elles sont <u>strictement parallèles</u> ($\mathscr{D}_1 \bigcap \mathscr{D}_2 = \emptyset$).

1.1.3 Propriétés du parallélisme

Définition 1. *On dit qu'une droite $\mathscr{D}_1$ est <u>parallèle</u> à une droite $\mathscr{D}_2$ lorsque $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$ ou $\mathscr{D}_1 \bigcap \mathscr{D}_2 = \emptyset$. On écrit alors $\mathscr{D}_1 \parallel \mathscr{D}_2$.*

Deux droites du plan sont donc soit sécantes, soit parallèles.

Proposition 1. *La relation "est parallèle à" est, dans l'ensemble des droites du plan, une relation d'équivalence.*

Preuve 1. *Il est clair que cette relation est réflexive et symétrique. Pour la transitivité, supposons que $\mathscr{D}_1 \parallel \mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_2 \parallel \mathscr{D}_3$. Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ étaient sécantes, on pourrait mener du point d'intersection deux parallèles à $\mathscr{D}_2$: ce qui est absurde (cf.1.1.1)* ■

Corollaire 1.
- *Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre-elles.*
- *Si deux droites sont parallèles, alors toute sécante à l'une est sécante à l'autre.*

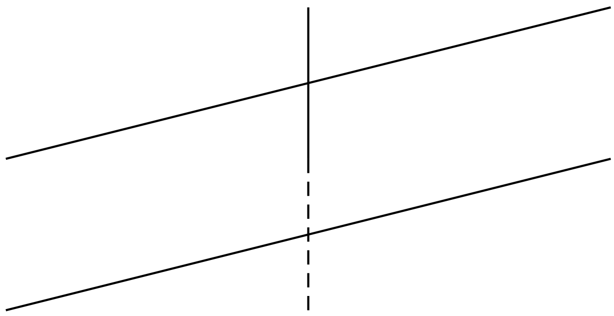

FIGURE 1.3 – sécante à deux parallèles

Les classes d'équivalence s'appellent directions de droites . On notera $\vec{\mathscr{D}}$ la direction d'une droite $\mathscr{D}$.

1.2 Repérage sur une droite

Là encore, on part de l'acquis des élèves : ils savent mesurer des distances avec la règle graduée.

1.2.1 Abscisse

- Un repère sur une droite $\mathscr{D}$ est un bipoint (O, I) de $\mathscr{D}$ avec $O \neq I$. La "distance" $u = OI$ définira l'unité de longueur sur cette droite.
- On admettra que ce repère induit un ordre sur la droite $\mathscr{D}$ (plus précisément une relation d'ordre) et donc les 1/2 droites et segments de droites $([O, I), [O, I]...)$

Définition 2. *Pour tout point $M \in \mathscr{D}$, on appelle abscisse de M dans le repère (O, I) le nombre réel noté x_M défini par*

$$\begin{cases} x_M = OM & si\ M \in [O, I) \\ x_M = -OM & sinon \end{cases}$$

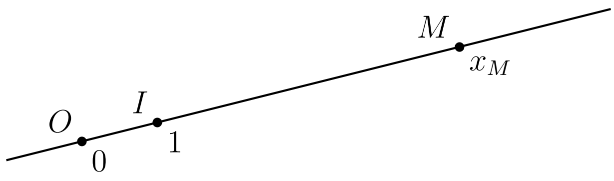

FIGURE 1.4 – abscisse sur une droite

En fait, l'intérêt de cette notion est d'établir une bijection entre la droite D et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (admis).

1.2.2 Mesure algébrique

Définition 3. *$\mathscr{D}$ étant munie d'un repère (O, I), on appelle mesure algébrique d'un bipoint (A, B) de $\mathscr{D}$ dans le repère (O, I) le réel $\overline{AB} = x_B - x_A$.*

Proposition 2. *$\mathscr{D}$ étant munie d'un repère (O, I), on a pour tous points A, B et C de $\mathscr{D}$:*

$\overline{BA} = -\overline{AB}$.

$\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$.

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ *(relation de Chasles).*

1.2.3 Distance sur une droite

Proposition 3. *$\mathscr{D}$ étant munie d'un repère (O, I), on a pour tous points A et B de $\mathscr{D}$: $AB = |\overline{AB}|$.*

La preuve s'établit facilement en distinguant les diverses positions de A et B sur la droite. Cette distance est évidemment mesurée en unité de longueur, c'est-à-dire en multiple de OI.

Proposition 4. ($\bigstar_{169}$) *Pour tous points A, B, M, N d'une droite $\mathscr{D}$ tels que $M \neq N$, le rapport $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}}$ est indépendant du repère choisi sur $\mathscr{D}$.*

Ce résultat sera utile lors de la formulation du théorème de Thalès. Il fait apparaître que la formule de changement de repère est une fonction affine des abscisses. Cela entraîne aussi que la distance sur une droite ne dépend que de l'unité du repère, et non du repère lui-même.

Proposition 5. ($\bigstar_{169}$) *Pour tous points A, B, M d'une droite $\mathscr{D}$, on a :*

$AB = 0 \Leftrightarrow A = B$.

$BA = AB$.

$|AM - MB| \leq AB \leq AM + MB$ *(inégalité triangulaire).*

$M \in [A, B] \Leftrightarrow AM + MB = AB$.

On définit maintenant le <u>milieu</u> d'un segment :

Proposition 6. *Pour tous points A et B d'une droite $\mathscr{D}$, il existe un point $m \in \mathscr{D}$ et un seul tel que $Am = mB = AB/2$. Son abscisse est $x_m = (x_A + x_B)/2$ et $m \in [A, B]$.*

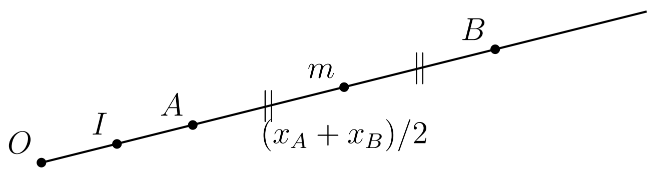

FIGURE 1.5 – milieu d'un segment

1.2.4 Distance dans le plan

Grâce à la remarque suivant la proposition 4, on a le résultat suivant :

Proposition 7. *Une unité de longueur u étant choisie, la distance AB entre deux points A et B du plan est la distance de ces deux points sur la droite qu'ils définissent lorsque celle-ci est munie d'un repère quelconque de longueur u.*

($\bigstar_{170}$) Les propriétés de cette distance sont les mêmes que sur une droite.

On peut maintenant définir les cercles, disques etc...par exemple, le cercle de centre Ω et de rayon R : $\mathscr{C}_{(\Omega,R)} = \{M \in \mathscr{P} / \Omega M = R\}$.

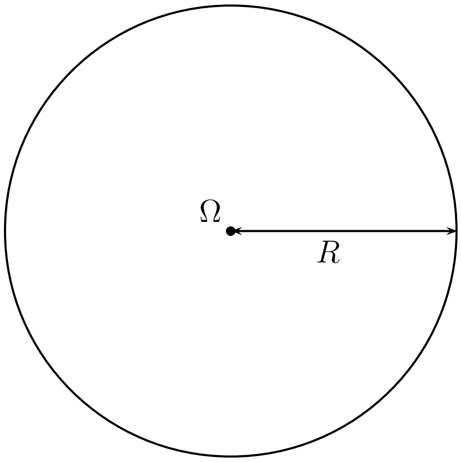

FIGURE 1.6 – cercle de centre Ω de rayon R

1.3 Projections parallèles

1.3.1 Axiome de projection

Définition 4. *Soit d une direction de droite et $\mathscr{D}'$ une droite n'appartenant pas à cette direction. La projection sur $\mathscr{D}'$ dans la direction d est l'application $p : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui associe à tout point M le point M' tel que : $M' \in \mathscr{D}'$ et $(MM') \in d$.*

Remarque : p n'est ni injective, ni surjective.

Proposition 8.
— *$\mathscr{D}'$ est l'ensemble des points invariants de p (et l'image de p).*
— ($\bigstar_{170}$) *$p \circ p = p$.*
— *(axiome de projection) toute projection conserve les milieux.*

1.3.2 Applications au triangle (Thalès faible)

Proposition 9. *Dans tout triangle, la parallèle à un côté menée du milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.*

Proposition 10. *Dans tout triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté .*

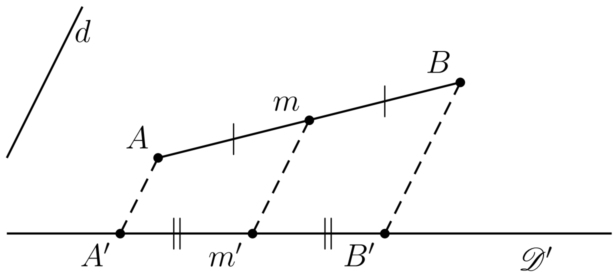

FIGURE 1.7 – conservation du milieu par projection

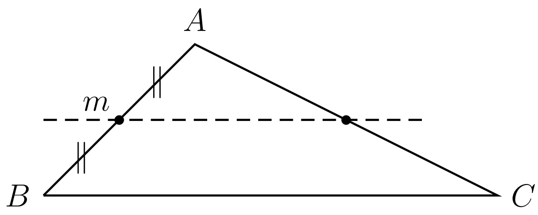

FIGURE 1.8 – version faible de Thalès

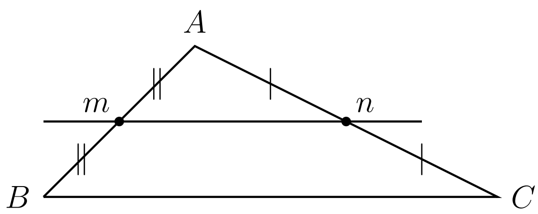

FIGURE 1.9 – la droite des milieux

1.3.3 Applications au parallélogramme

Définition 5. (A, B, C, D) *est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales* $[AC]$ *et* $[BD]$ *ont même milieu.*

Théorème 1.

1. *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles.*
2. *La réciproque est vraie s'il n'est pas aplati.*

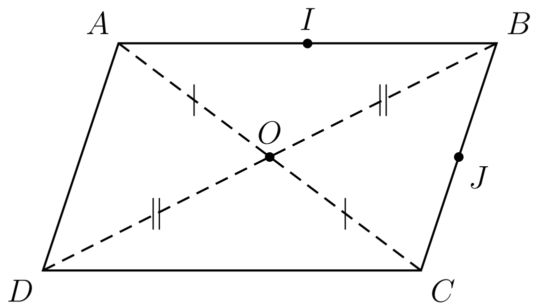

FIGURE 1.10 – parallélogramme

Preuve 2.

1. *Soit I le milieu de $[A, B]$ et O celui de $[A, C]$. D'après (1.3.2), on a $(IO) \parallel (BC)$ et de même $(IO) \parallel (AD)$. Par transitivité on en déduit que $(AD) \parallel (BC)$. On prouve de la même façon que $(AB) \parallel (DC)$.*
2. *Soit O' le milieu de $[B, D]$. Comme I est celui de $[A, B]$, on a que I, O, O' sont alignés. Pareillement, si J désigne le milieu de $[B, C]$, on a J, O et O' qui sont alignés. Donc $O' \in (OI) \bigcap (OJ)$, d'où $O = O'$* ■

1.3.4 Médianes d'un triangle

Définition 6. *Soit (A, B, C) un triangle. La <u>médiane issue de A</u> est la droite (AI) joignant le sommet A au milieu I du côté opposé $[B, C]$.*

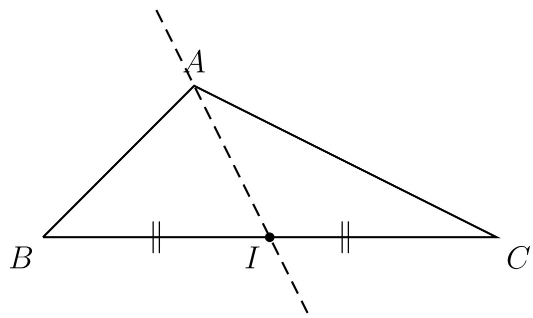

FIGURE 1.11 – médiane issue de A