

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Courbes et surfaces : Géométrie &amp; CAO</b>	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>Courbes du plan et de l'espace</b>	<b>21</b>
1.1	Courbes paramétrées . . . . .	22
1.1.1	Premiers exemples et étude locale . . . . .	22
1.1.2	Courbes équivalentes et paramétrisation par longueur d'arc	31
1.1.3	Repère mobile . . . . .	38
1.1.4	Courbure et torsion : détermination pratique . . . . .	47
1.2	Courbes de Bézier . . . . .	50
1.2.1	La construction de De Casteljau (1959) . . . . .	50
1.2.2	La construction via les polynômes de Bernstein . . . . .	57
1.2.3	Splines . . . . .	66
1.3	Exercices et sujets d'étude . . . . .	76
1.3.1	Courbes paramétrées et longueur de courbes . . . . .	76
1.3.2	Repère de Frenet, courbure et torsion . . . . .	78
1.3.3	Courbes de Bézier . . . . .	80
1.3.4	Courbes Splines . . . . .	80
1.3.5	Courbure et torsion sous <i>Matlab</i> . . . . .	83
1.3.6	Génération des fonctions B-splines et applications . . . . .	84
1.3.7	La néphroïde de Huygens . . . . .	86
1.3.8	Hélices sphériques . . . . .	92
1.3.9	Interpolation et Splines, étude d'une application à l'industrie de la chaussure . . . . .	96
<b>2</b>	<b>Surfaces</b>	<b>101</b>
2.1	Surfaces paramétrées . . . . .	101
2.1.1	Nappes paramétrées . . . . .	104
2.1.2	Plan tangent, direction normale, première et seconde forme fondamentales . . . . .	113

2.1.3	Courbures . . . . .	126
2.1.4	Surfaces réglées et surfaces développables . . . . .	133
2.2	Surfaces de Bézier . . . . .	134
2.2.1	Carreaux de Bézier . . . . .	135
2.2.2	Triangles de Bézier . . . . .	141
2.2.3	Courbure de Gauss d'une surface de Bézier . . . . .	152
2.3	Exercices et sujets d'étude . . . . .	155
2.3.1	Paramétrisation, plan tangent et longueur de courbe sur les surfaces . . . . .	155
2.3.2	Seconde forme fondamentale et courbures . . . . .	159
2.3.3	Surfaces de Bézier . . . . .	160
2.3.4	Tracé d'une surface de Bézier à partir du réseau de contrôle	161
2.3.5	La pseudosphère . . . . .	163
2.3.6	Surfaces développables . . . . .	168
2.3.7	Surfaces de Bézier réglées . . . . .	170

## **II Espaces et transformations : Géométrie & Infographie** **175**

<b>3</b>	<b>Actions de groupes et espaces affines</b>	<b>179</b>
3.1	Groupes . . . . .	179
3.1.1	Définitions et propriétés premières . . . . .	179
3.1.2	Sous-groupes . . . . .	180
3.1.3	Classes modulo un sous-groupe . . . . .	180
3.1.4	Groupes opérant sur un ensemble . . . . .	182
3.1.5	Isométries vectorielles de $\mathcal{V}_2$ et de $\mathcal{V}_3$ . . . . .	185
3.2	Espaces affines . . . . .	191
3.2.1	Définitions, propriétés et notations . . . . .	192
3.2.2	Géométrie cartésienne . . . . .	193
3.3	Applications affines . . . . .	197
3.3.1	Définitions, propriétés premières . . . . .	197
3.3.2	Applications affines et barycentres . . . . .	200
3.4	Isométries affines . . . . .	202
3.4.1	Généralités . . . . .	202
3.4.2	Exemples génériques . . . . .	205
3.4.3	Classification des isométries : principe général . . . . .	208
3.4.4	Exemple : classification des isométries du plan . . . . .	209
3.5	La pertinence de l'algèbre . . . . .	212

3.5.1	Classification des coniques du plan . . . . .	213
3.5.2	Le corps des quaternions . . . . .	217
3.6	Exercices et sujets d'étude . . . . .	229
3.6.1	Produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$ - utilisation en image . . . . .	229
3.6.2	Isométries affines de l'espace . . . . .	230
3.6.3	Classification des quadriques . . . . .	232
3.6.4	Preuve « logicielle » de l'associativité des quaternions . . . . .	235
3.6.5	Un cas de stratégie de jeu traité géométriquement . . . . .	236
3.6.6	Les fractions continues et le nombre $\pi$ . . . . .	238
3.6.7	Génération de motifs sous le groupe diédral $D_8$ . . . . .	240
3.6.8	Bibliothèque logicielle pour les quaternions . . . . .	246
3.6.9	Interpolation sur quaternions . . . . .	247
<b>4</b>	<b>Espaces projectifs</b> . . . . .	<b>253</b>
4.1	Espaces projectifs . . . . .	254
4.1.1	Définitions premières . . . . .	254
4.1.2	Sous-espaces projectifs . . . . .	257
4.1.3	Coordonnées homogènes et repères d'un espace projectif . . . . .	259
4.1.4	Groupe projectif . . . . .	261
4.1.5	Courbes et surfaces de l'espace projectif . . . . .	263
4.2	Matrices projectives : généralités et utilisation en image . . . . .	269
4.2.1	Plongements de l'espace, du plan et de leurs directions . . . . .	269
4.2.2	Matrices projectives des transformations de l'espace : généralités . . . . .	271
4.3	Matrices projectives des applications affines de $\mathcal{E}$ . . . . .	275
4.3.1	Une méthode de détermination exhaustive . . . . .	275
4.3.2	Exemples génériques . . . . .	279
4.3.3	Bilan . . . . .	281
4.4	Matrices projectives des projections de l'espace . . . . .	283
4.4.1	Tableau synoptique des projections planes . . . . .	284
4.4.2	Projections parallèles . . . . .	285
4.4.3	Projections perspectives ou centrales . . . . .	291
4.5	Exercices et sujets d'étude . . . . .	301
4.5.1	Relation entre droite affine et droite projective . . . . .	301
4.5.2	Courbes de Bézier rationnelles . . . . .	301
4.5.3	Outils pour visualisation des projections centrales . . . . .	303
4.5.4	Matrices projectives des isométries du plan affine (aspect direct et réciproque) . . . . .	304

4.5.5	Birapport de quatre points d'une droite projective . . .	305
4.5.6	Connaître les isométries vectorielles de $\mathcal{V}_3$ : bilan de l'existant et une méthode complémentaire pour faciliter la détermination des matrices projectives . . . . .	307
4.5.7	Détermination des matrices projectives des isométries de l'espace affine (aspect direct et réciproque) . . . . .	312
4.5.8	Le théorème des trois points . . . . .	313
<b>III Corrections</b>		<b>317</b>
<b>1</b>	<b>Courbes du plan et de l'espace</b>	<b>319</b>
1.1	Courbes paramétrées . . . . .	319
1.2	Courbes de Bézier . . . . .	322
1.3	Exercices et sujets d'étude . . . . .	325
1.3.1	Courbes paramétrées et longueur de courbes . . . . .	325
1.3.2	Repère de Frenet, courbure et torsion . . . . .	328
1.3.3	Courbes de Bézier . . . . .	332
1.3.4	Courbes Splines . . . . .	333
1.3.5	Courbure et torsion sous <i>Matlab</i> . . . . .	336
1.3.6	Génération des fonctions B-splines et applications . . . .	336
1.3.7	La néphroïde de Huygens . . . . .	336
1.3.8	Hélices sphériques . . . . .	338
1.3.9	Interpolation et splines, étude d'une application à l'industrie de la chaussure . . . . .	347
<b>2</b>	<b>Surfaces</b>	<b>351</b>
2.1	Surfaces paramétrées . . . . .	351
2.2	Surfaces de Bézier . . . . .	357
2.3	Exercices et sujets d'étude . . . . .	361
2.3.1	Paramétrisation, plan tangent et longueur de courbe sur les surfaces . . . . .	361
2.3.2	Seconde forme fondamentale et courbures . . . . .	364
2.3.3	Surfaces de Bézier . . . . .	366
2.3.4	Tracé d'une surface de Bézier à partir du réseau de contrôle	368
2.3.5	La pseudosphère . . . . .	368
2.3.6	Surfaces développables . . . . .	371
2.3.7	Surfaces de Bézier réglées . . . . .	372

<b>3</b>	<b>Actions de groupes et espaces affines</b>	<b>375</b>
3.1	Groupes . . . . .	375
3.2	Espaces affines . . . . .	378
3.3	Applications affines . . . . .	378
3.4	Isométries affines . . . . .	379
3.5	La pertinence de l'algèbre . . . . .	379
3.6	Exercices et sujets d'étude . . . . .	381
3.6.1	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ - utilisation en image . . . . .	381
3.6.2	Isométries affines de l'espace . . . . .	382
3.6.3	Classification des quadriques . . . . .	385
3.6.4	Preuve « logicielle » de l'associativité des quaternions . . . . .	386
3.6.5	Un cas de stratégie de jeu traité géométriquement . . . . .	386
3.6.6	Les fractions continues et le nombre $\pi$ . . . . .	387
3.6.7	Génération de motifs sous le groupe diédral $D_8$ . . . . .	389
3.6.8	Bibliothèque logicielle pour les quaternions . . . . .	389
3.6.9	Interpolation sur quaternions . . . . .	390
<b>4</b>	<b>Espaces projectifs</b>	<b>393</b>
4.1	Espaces projectifs . . . . .	393
4.2	Matrices projectives : généralités et utilisation en image . . . . .	395
4.3	Matrices projectives des applications affines de $\mathcal{E}$ . . . . .	396
4.4	Matrices projectives des projections de l'espace . . . . .	400
4.5	Exercices et sujets d'étude . . . . .	405
4.5.1	Relation entre droite affine et droite projective . . . . .	405
4.5.2	Courbes de Bézier rationnelles . . . . .	406
4.5.3	Outils pour visualisation des projections centrales . . . . .	407
4.5.4	Matrices projectives des isométries du plan affine (aspect direct et réciproque) . . . . .	407
4.5.5	Birapport de quatre points d'une droite projective . . . . .	408
4.5.6	Connaître les isométries vectorielles de $\mathcal{V}_3$ : bilan de l'existant et une méthode complémentaire pour faciliter la détermination des matrices projectives . . . . .	411
4.5.7	Détermination des matrices projectives des isométries de l'espace affine (aspect direct et réciproque) . . . . .	413
4.5.8	Le théorème des trois points . . . . .	415

<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>419</b>
<b>A</b>	<b>Étude d'une courbe paramétrée</b>	<b>421</b>
A.1	Périodicité, symétrie . . . . .	422
A.2	Étude des variations . . . . .	422
A.3	Étude locale . . . . .	423
A.3.1	Points spécifiques . . . . .	423
A.3.2	Branches asymptotiques . . . . .	424
A.4	Tracé de $\Gamma$ . . . . .	425
<b>B</b>	<b>Rappels sur les fonctions de plusieurs variables</b>	<b>427</b>
B.1	Continuité des fonctions de plusieurs variables . . . . .	428
B.2	Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables . . . . .	429
B.3	Calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables . . . . .	432
B.3.1	Calcul d'intégrales doubles . . . . .	432
B.3.2	Calculs d'intégrales triples . . . . .	433
<b>C</b>	<b>Barycentres et convexes du plan et de l'espace</b>	<b>435</b>
C.1	Barycentres . . . . .	435
C.2	Convexes . . . . .	437
<b>D</b>	<b>Espaces vectoriels euclidiens</b>	<b>439</b>
D.1	Définitions - Propriétés premières . . . . .	439
D.1.1	Espaces vectoriels : rappels . . . . .	439
D.1.2	Espaces vectoriels euclidiens . . . . .	440
D.1.3	Vecteurs orthogonaux . . . . .	442
D.1.4	Vecteurs orthonormés . . . . .	442
D.1.5	Sous-espaces orthogonaux . . . . .	443
D.2	Groupe orthogonal . . . . .	444
D.2.1	Opérateurs orthogonaux . . . . .	444
D.2.2	Groupe orthogonal . . . . .	444
D.2.3	Matrices orthogonales . . . . .	445
D.2.4	Exemples importants d'isométries vectorielles directes et indirectes . . . . .	446
D.2.5	Orientation de $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_3$ . . . . .	446
D.3	Produit mixte et vectoriel dans $\mathcal{V}_3$ . . . . .	447
D.3.1	Produit mixte . . . . .	447
D.3.2	Produit vectoriel . . . . .	448
D.3.3	Produit vectoriel et mixte dans $\mathcal{V}_3$ . . . . .	449

D.4	Dérivées, produit scalaire, produit vectoriel . . . . .	450
<b>E</b>	<b>Géométrie cartésienne pour l'infographie</b>	<b>451</b>
E.1	Droites affines du plan . . . . .	451
E.1.1	Définitions d'une droite affine . . . . .	451
E.1.2	Demi-droites, segments . . . . .	453
E.1.3	Zonage du plan . . . . .	454
E.1.4	Parallélisme, orthogonalité, intersections de droites . . .	454
E.1.5	Distance d'un point à une droite donnée par une équation cartésienne . . . . .	455
E.2	Droites affines dans l'espace $\mathcal{E}$ . . . . .	455
E.2.1	Remarques générales . . . . .	455
E.2.2	Un résultat important : distance de deux droites de l'espace	455
E.3	Plans affines de l'espace $\mathcal{E}$ . . . . .	457
E.3.1	Définitions d'un plan . . . . .	457
E.3.2	« Dessus d'un plan », triangles, facettes orientées . . . .	459
E.3.3	Zonage de l'espace . . . . .	460
E.3.4	Parallélisme, orthogonalité, intersections de plans . . . .	461
E.3.5	Distance d'un point à un plan donné par une équation cartésienne . . . . .	461
E.3.6	À titre d'exemple : problème de réflexion de rayons (loi de Descartes) . . . . .	461
E.4	Cercles et sphères . . . . .	463
E.4.1	Donnée par centre et rayon . . . . .	463
E.4.2	Donnée par un diamètre . . . . .	463
E.4.3	Savoir-faire classiques attendus . . . . .	463
E.5	Complément : systèmes d'équations linéaires . . . . .	466
	<b>Bibliographie</b>	<b>469</b>
	<b>Index</b>	<b>477</b>