

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Assertions

Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \rightarrow \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E .

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$\text{non } P$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P \text{ ou } Q \iff Q \text{ ou } P$
- $P \text{ et } Q \iff Q \text{ et } P$

P , Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff \text{non}(\text{non } P)$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- **Existentiel** : il existe un élément de E vérifiant P . On note $\exists x \in E \ P(x)$.
- **Universel** : tous les éléments de E vérifient P . On note $\forall x \in E \ P(x)$.

S'il existe un unique élément de E vérifiant P , on note $\exists! x \in E, \ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $\text{non} (\exists x \in E; P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non } P(x))$
- $\text{non} (\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E; \text{non } P(x))$
- $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y) \iff \forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$
- $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y) \iff \exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$

Stratégies pour une implication

- | | |
|---|---|
| $\begin{array}{c} \Uparrow \\ \Downarrow \end{array}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $P \Rightarrow Q$ • $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ • $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ • $\text{non}[P \text{ et } \text{non } Q]$. |
|---|---|

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Théorème de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbf{N}$, et $n_0 \in \mathbf{N}$.

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}$$

Théorème de récurrence double

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)) \end{cases}$$

Théorème de récurrence forte

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E . On dit que

- A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B .
- A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.

Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la **réunion** de A et B .
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'**intersection** de A et B .
- $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A dans E .
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est la **différence** de A et B .

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\bullet \mathbb{C}_E(A \cup B) = (\mathbb{C}_E A) \cap (\mathbb{C}_E B)$$

Lois de Morgan

$$\bullet \mathbb{C}_E(A \cap B) = (\mathbb{C}_E A) \cup (\mathbb{C}_E B)$$

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

$\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice de A .

$$\bullet \mathbf{1}_{\mathbb{C}_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$$

$$\bullet \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B)$$

$$\bullet \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

$$\bullet \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble défini par $E \times F = \{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$. L'égalité de deux couples (x, y) et (x', y') est définie par $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite :

- **injective** si $(\forall (x, x') \in E \times E), (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$;
- **surjective** si $(\forall y \in F), (\exists x \in E) ; y = f(x)$.

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective. • $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective. • $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e. $(\forall y \in F), (\exists ! x \in E) ; y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une **bijection**. On définit une application $f^{-1} : F \rightarrow E$, appelée **application réciproque** de f , par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}.$$

$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \rightarrow E \begin{cases} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{cases}$$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f .

Composée de bijections

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective} \quad \text{et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$.

- **L'image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par
 $f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A ; y = f(x)\}.$
- **L'image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par
 $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$

*Nous devons plutôt nous fier
au calcul algébrique qu'à notre jugement.*

Leonhard Euler

Techniques fondamentales en analyse

Nombres réels, calculs algébriques

Sommes et produits finis

Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel. On note

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{0 \leq k \leq n} x_k \text{ la somme des } x_k$$

$$P_n = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^n x_k = \prod_{k \in \{0, \dots, n\}} x_k \text{ le produit des } x_k.$$

Les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition se généralisent aux sommes et produits finis.

$$\sum_{k=0}^n [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_0$$

Somme télescopique
 $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de réels.

La somme des n premiers (resp. carrés, cubes d') entiers est donnée par :

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Coefficients binomiaux

Le produit des n premiers entiers est la **factorielle de n** . On note $n! = \prod_{k=1}^n k$.

On convient que $0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Coefficients du binôme
 où $(n, p) \in \mathbf{Z}^2$.

Les coefficients du binôme sont des entiers naturels qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (a, b) \in \mathbf{C}^2 \text{ et } n \in \mathbf{N}.$$

Identité géométrique

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Avec $b = 1$, on obtient la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison a .

Systèmes d'équations linéaires

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système de n équations linéaires à p inconnues ($\mathcal{S}$) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j , $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$, $(L_i \leftarrow \lambda_i L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre L_j ($i \neq j$), $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

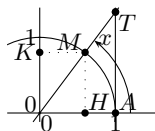
Trigonométrie circulaire

Le cercle trigonométrique

$$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

$$\bullet \cos(x) = \overline{OH}, \sin(x) = \overline{OK}$$

$$\bullet \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ • $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ • $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ • $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ • $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ • $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)]$
- $\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)]$

Formules de factorisation

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

$$\forall z \in \mathbf{C} \exists ! (x, y) \in \mathbf{R}^2, z = x + iy$$

$x = \Re(z)$ est la **partie réelle**
 $y = \Im(z)$ est la **partie imaginaire** de z .

$$z = z' \iff \begin{cases} \Re z = \Re z' \\ \Im z = \Im z' \end{cases}$$

z, z' sont deux nombres complexes.

- Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le **conjugué** de z .
- Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le **module** de z .

Nombres complexes de module 1

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$\theta \in \mathbf{R}$, $e^{i\theta}$ est l'**exponentielle imaginaire (pure)** d'angle θ .

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$ de réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$

Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$$(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$$

Formules d'Euler et de Moivre

$$\bullet \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \bullet \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formules d'Euler

$$\bullet (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\bullet (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Formules de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Notation exponentielle d'un complexe non nul

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists (\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}, z = \rho e^{i\theta}$$

Forme exponentielle du nombre complexe non nul z .

Si $z \in \mathbf{C}^*$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est le **module** de z et θ est appelé un **argument** de z . On note $\arg(z)$ un argument quelconque de z .

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases} \quad (z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$$

Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z = x + iy$ un complexe présenté en notation algébrique. On définit

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'} \quad (z, z') \in \mathbf{C}^2$$

Racines n -ièmes du nombre complexe 1

Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. On note $\omega_n = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

ω_n est l'exponentielle imaginaire d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

$$\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}$$

$\mathbf{U}_n$ est l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \dots + \omega_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$$

La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Racines n -ièmes d'un complexe

L'ensemble des n racines n -ièmes de $a \in \mathbf{C}^*$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\zeta_0 \omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_0, \zeta_0 \omega_n, \zeta_0 \omega_n^2, \dots, \zeta_0 \omega_n^{n-1}\} \\ &= \left\{ \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}} \right\} \end{aligned}$$

où ζ_0 est une solution particulière de $z^n = a$, par exemple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}$.

Équations polynomiales de degré 2

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

$(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, δ est l'une des racines carrées (complexes) de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Système somme-produit

Soit $(\sigma, \rho) \in \mathbf{C}^2$. Alors le couple (z_1, z_2) est solution du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = \sigma \\ z_1 \times z_2 = \rho \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - \sigma z + \rho = 0$.

Nombres complexes et géométrie

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct.

- Au point $M(\frac{x}{y})_{\mathcal{R}}$, on associe son **affixe**, le nombre complexe $z = x + iy$.