

Table des matières

AVANT-PROPOS	3
1. L'ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE	13
1.1 Fondements de la relativité restreinte	13
1.1.1 Postulats de Poincaré-Einstein	14
1.1.2 Transformation de Lorentz-Poincaré	14
1.1.3 Formule de composition des vitesses	15
1.2 Invariants de l'espace-temps	15
1.2.1 Espace-temps plat	15
1.2.2 Vitesse de propagation des interactions	16
1.2.3 Intervalle entre deux événements	16
1.2.4 Durée propre	16
1.3 Structure de l'espace-temps plat	17
1.3.1 Intervalle du genre lumière	17
1.3.2 Intervalle du genre temps	18
1.3.3 Intervalle du genre espace	18
1.3.4 L'espace-temps euclidien de Poincaré	19
1.4 Métrique de l'espace-temps plat	19
1.4.1 Quadrivecteurs	20
1.4.2 Produit scalaire	20
1.4.3 Espace-temps de Poincaré-Minkowski	20
1.4.4 Tenseur fondamental de l'espace-temps plat	21
1.5 Énergie	21
1.5.1 Quadrivecteur vitesse unitaire	21
1.5.2 Quadrivecteur impulsion-énergie	22
1.5.3 Invariance de la norme du quadrivecteur impulsion-énergie	22
1.6 Exercices	23
2. ÉLÉMENTS DE CALCUL TENSORIEL	27
2.1 Conventions	27
2.1.1 Convention de sommation	27
2.1.2 Convention de notation d'indice primé	28
2.2 Vecteurs contravariants et covariants	29
2.2.1 Vecteurs contravariants	29
2.2.2 Espace vectoriel dual	29
2.2.3 Vecteurs covariants	30
2.3 Espaces vectoriels préhilbertiens	31
2.3.1 Produit scalaire	31
2.3.2 Identification d'un espace vectoriel préhilbertien avec son dual	31
2.3.3 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur	31
2.3.4 Relations entre composantes contravariantes et covariantes	32
2.3.5 Expression du produit scalaire en fonction des composantes covariantes	32

2.4	Espaces ponctuels	33
2.4.1	Définition d'un espace ponctuel	33
2.4.2	Repères d'un espace ponctuel préhilbertien	33
2.4.3	Notations indicielles des dérivées partielles	34
2.4.4	Coordonnées curvilignes	34
2.4.5	Repère naturel d'un système de coordonnées curvilignes	34
2.4.6	Élément linéaire d'un espace ponctuel	35
2.5	Définition des tenseurs	35
2.5.1	Changement de base naturelle d'un espace vectoriel	35
2.5.2	Transformation des composantes d'un vecteur lors d'un changement de base	36
2.5.3	Définition des tenseurs d'ordre deux	37
2.5.4	Tenseurs d'ordre quelconque	37
2.5.5	Un tenseur d'ordre deux : le tenseur métrique	38
2.6	Opérations sur les tenseurs	38
2.6.1	Espace vectoriel de tenseurs	38
2.6.2	Produit scalaire	39
2.6.3	Contraction des indices	39
2.6.4	Critères de tensorialité	40
2.7	Analyse tensorielle	40
2.7.1	Variations des repères naturels	41
2.7.2	Comparaison des vecteurs entre eux	41
2.8	Symboles de Christoffel	41
2.8.1	Définitions	41
2.8.2	Propriétés des symboles de Christoffel	42
2.9	Dérivée covariante	43
2.9.1	Dérivée covariante d'un vecteur	43
2.9.2	Composantes covariantes du tenseur dérivée covariante d'un vecteur	43
2.9.3	Dérivée covariante d'un tenseur	44
2.10	Équations des droites en coordonnées curvilignes	45
2.11	Opérateurs différentiels	46
2.11.1	Gradient d'une fonction scalaire	46
2.11.2	Rotationnel d'un champ de vecteurs	47
2.11.3	Divergence d'un champ de vecteurs	47
2.12	Exercices	48
3.	ÉLECTROMAGNÉTISME ET DYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS	49
3.1	Covariance des lois de la physique	49
3.1.1	Quadrivecteurs	49
3.1.2	Tenseurs covariants d'ordre quelconque	50
3.1.3	Composantes covariantes et contravariantes	50
3.2	Le tenseur champ électromagnétique	51
3.3	Les équations de Maxwell-Lorentz	53
3.3.1	Quadrivecteur densité de courant électrique	53
3.3.2	Premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz	53
3.3.3	Second groupe des équations de Maxwell-Lorentz	55
3.3.4	Loi de conservation de l'électricité	56
3.4	Dynamique classique des milieux continus	56
3.4.1	Dérivées partielle et totale par rapport au temps	56
3.4.2	Équation de conservation	57
3.4.3	Forces de masse et forces superficielles	57
3.4.4	Tenseur des contraintes	58
3.4.5	Équations générales de la dynamique des milieux continus	59
3.4.6	Autre expression des équations générales	60

3.5	Dynamique relativiste des milieux continus	61
3.5.1	Équations relativistes dans un système de repos	61
3.5.2	Équations relativistes sous forme tensorielle	62
3.6	Tenseur impulsion-énergie	63
3.6.1	Tenseur impulsion-énergie d'un milieu continu	63
3.6.2	Quadrivecteur densité de force de Lorentz	63
3.6.3	Tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique	64
3.7	Exercices	66
4.	IDÉES DE BASE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE	69
4.1	Il faut modifier la loi de la gravitation	69
4.2	Gravitation et accélération équivalentes	70
4.2.1	Principe d'équivalence de Newton	70
4.2.2	Mesures dans des champs de gravitation et d'accélération	71
4.2.3	Principe d'équivalence d'Einstein	71
4.2.4	Équivalence locale entre gravitation et accélération	72
4.3	Systèmes de référence équivalents	72
4.3.1	Critique des fondements de la mécanique classique	72
4.3.2	Principe de relativité généralisée	73
4.3.3	Une idée audacieuse	73
4.4	Nécessité d'une géométrie non euclidienne	74
4.4.1	Système de référence en rotation	74
4.4.2	Décalage gravitationnel	75
4.4.3	Courbure des rayons lumineux	75
4.4.4	Systèmes de référence non inertiels	76
4.5	Principe de relativité généralisé	76
4.5.1	Espace non euclidien : surface sphérique à deux dimensions	77
4.5.2	Coordonnées curvilignes de Gauss	77
4.5.3	Covariance des lois de la nature	77
4.6	La matière-énergie déforme l'espace-temps	78
4.6.1	Le contenu de l'espace pourrait déterminer sa métrique	78
4.6.2	L'espace non euclidien de Poincaré	79
4.6.3	Chronogéométrie de l'espace-temps	79
4.6.4	La matière-énergie détermine la chronogéométrie de l'espace-temps	80
4.7	L'espace-temps riemannien	80
4.7.1	Courbure de l'espace-temps	81
4.7.2	Principe des géodésiques	81
4.8	Les équations d'Einstein	82
4.9	Exercices	83
5.	ESPACES RIEMANNIENS	85
5.1	Définition des espaces riemanniens	85
5.1.1	Notion de variété	85
5.1.2	Définition des espaces de Riemann	86
5.1.3	Métriques euclidienne et riemannienne	86
5.1.4	Propriétés des espaces de Riemann	87
5.2	Équation des géodésiques	87
5.2.1	Mouvement sans accélération	87
5.2.2	Transport parallèle	88
5.2.3	Extremum des chemins entre deux points	89

5.3	Transport parallèle	89
5.3.1	Transport parallèle dans l'espace euclidien	90
5.3.2	Transport parallèle dans l'espace riemannien	90
5.3.3	Transport parallèle infinitésimal	90
5.4	Tenseur de courbure	91
5.4.1	Détermination du tenseur de courbure	91
5.4.2	Composantes covariantes du tenseur de courbure	92
5.5	Propriétés du tenseur de courbure	93
5.5.1	Systèmes de coordonnées normales	93
5.5.2	Symétries du tenseur de courbure	94
5.5.3	Première identité de Bianchi	94
5.5.4	Composantes indépendantes	94
5.6	Courbure riemannienne scalaire	95
5.6.1	Tenseur de Ricci et scalaire de courbure	95
5.6.2	Seconde identité de Bianchi	96
5.6.3	Tenseur d'Einstein	96
5.7	Exercices	97
6.	ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE	99
6.1	Espace-temps à courbure riemannienne	99
6.1.1	La variété espace-temps V_4	99
6.1.2	Métrique spatiale non euclidienne	100
6.1.3	Temps propre	100
6.1.4	Élément de distance spatiale	101
6.2	Principe d'équivalence	102
6.2.1	Métrique euclidienne tangente	102
6.2.2	Système inertiel local	103
6.3	Principe des géodésiques	103
6.3.1	Système différentiel des géodésiques	104
6.3.2	Approximation newtonienne	104
6.3.3	Propagation d'un rayon lumineux	106
6.4	Équations d'Einstein	106
6.4.1	Déformation de l'espace-temps de la relativité restreinte	106
6.4.2	Contraintes imposées aux équations d'Einstein	107
6.4.3	Les équations de la gravitation relativiste	108
6.4.4	« Rigidité » de l'espace-temps	109
6.4.5	Limite newtonienne	110
6.5	Champ de gravitation central symétrique	111
6.5.1	Champ à symétrie centrale dans le vide	112
6.5.2	Singularité de Schwarzschild	113
6.5.3	Champ à symétrie centrale à l'intérieur de la matière	113
6.6	Ondes gravitationnelles	114
6.6.1	Équations d'Einstein linéarisées	114
6.6.2	Propagation dans le vide	115
6.7	Exercices	117
7.	VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES	119
7.1	Avance du périhélie de Mercure	119
7.1.1	Insuffisance de la théorie newtonienne	119
7.1.2	Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild	120
7.1.3	Avance du périhélie des planètes	121

7.2	Déviation des rayons lumineux	122
7.2.1	Équation de la déviation d'un rayon lumineux	122
7.2.2	Déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage du Soleil	124
7.2.3	Retards d'échos radar renvoyés par une planète	124
7.2.4	Mirages gravitationnels	125
7.3	Décalage gravitationnel de la fréquence d'un rayonnement	126
7.3.1	Décalage théorique d'une fréquence	126
7.3.2	Mesures du décalage gravitationnel	128
7.3.3	Système de positionnement GPS	128
7.4	Déclin de l'orbite d'un pulsar double	129
7.4.1	Émissions radio d'un pulsar	129
7.4.2	Pulsars binaires	130
7.4.3	Pulsar binaire PSR 1913+16	130
7.5	Exercices	131
8.	COSMOLOGIE	133
8.1	La révolution cosmologique relativiste	133
8.1.1	L'Univers statique d'Einstein	133
8.1.2	Les univers non statiques	134
8.2	Espace homogène et isotrope	135
8.2.1	Hypothèse de l'espace homogène et isotrope	135
8.2.2	Métrique de l'espace isotrope	136
8.2.3	Espace isotrope à courbure positive	136
8.2.4	Espace isotrope à courbure négative	138
8.3	Univers isotrope fermé	138
8.3.1	Hypothèses simplificatrices	138
8.3.2	Métrique spatio-temporelle d'un univers fermé	139
8.3.3	Modèle d'univers fermé	140
8.4	Univers isotrope ouvert	140
8.5	Univers isotrope euclidien	141
8.6	Cosmographie d'univers en expansion	142
8.6.1	Des univers en expansion	142
8.6.2	La fuite des amas de galaxies	142
8.6.3	La constante de Lemaître-Hubble	143
8.7	Cosmogonie du « Gros Boum »	144
8.7.1	La création de l'Univers par Monseigneur Lemaître	144
8.7.2	Le scénario du « Gros Boum »	144
8.8	Une cosmologie en devenir	145
8.8.1	Topologie de l'Univers	145
8.8.2	Par delà l'au-delà	146
	CORRIGÉS DES EXERCICES	149
	BIBLIOGRAPHIE	173
	INDEX	175