

*Chapitre 1*

# **Éloges de la logique**

## Pluralité des logiques

La mathématique est-elle logique ? Répondre à une telle question suppose savoir ce qu'est la logique. Or, si l'on consulte l'ouvrage de Jean-Pierre Belna : *Histoire de la logique*, on prend conscience dès le début qu'il n'existe pas de définition simple de la logique. On s'aperçoit que s'il existe une logique classique, datant des Grecs anciens, d'autres logiques se sont développées au cours des siècles : logiques étendues, alternatives, floues, etc.

Pour la plupart des gens il n'existe que la logique classique. Celle-ci est bivalente : une proposition est soit vraie, soit fausse. C'est seulement à partir de 1920 que la première logique non bivalente est apparue : une tierce valeur est introduite qui n'est ni le vrai, ni le faux mais l'indétermination.

La logique floue est encore plus complexe. Il existe en effet des concepts flous comme jeune et beau, par exemple. On peut être plus ou moins jeune ou plus ou moins beau. En définissant une fonction d'appartenance on pourra dire que « Untel est beau à 20% » ou que « Machin a un degré de jeunesse de 40%. » Les affirmations peuvent donc être « plus ou moins vraies ».

Une algébrisation de la logique a vu le jour au cours de la première moitié du 19<sup>e</sup> siècle. George Boole (1815-1864) est le créateur de la symbolique moderne de la logique. Il s'était proposé d'appliquer le calcul algébrique à la logique et il devint ainsi le premier à la mathématiser vraiment. L'apport des algèbres de Boole à l'informatique est considérable. Elles ont très vite servi au traitement binaire des données et au découpage des calculs. Depuis leur récente axiomatisation, les algèbres de Boole constituent des structures mathématiques couramment utilisées en informatique.

La mise en œuvre de la logique pour réaliser un tour de mathématique est pratiquement toujours la logique classique mise en forme par les anciens Grecs. C'est en effet Aristote (-384, -324) qui est considéré comme l'inventeur de la logique. Les hommes l'utilisaient bien avant lui mais Aristote l'a érigé en discipline autonome et a théorisé le raisonnement logique. Ainsi qu'il l'affirme lui-même :

*Sur cette question, il n'y avait pas une partie déjà élaborée et une autre non : il n'existait absolument rien.*

Le plus connu des raisonnements logiques étudiés par Aristote est le *syllogisme*. Le plus souvent cité est le suivant : « Tous les hommes sont mortels, tous les Grecs sont des hommes, donc tous les Grecs sont mortels. »

Le syllogisme comporte trois termes, unis deux à deux dans trois propositions : deux *prémises* d'où découle la *conclusion*. Il met en évidence le caractère général de la logique aristotélicienne ; c'est un raisonnement juste en vertu de sa forme et non de son contenu.

Le terme syllogisme apparaît pour la première fois dans les *Topiques*, avec la définition suivante :

*Discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données.*



## La logique du menteur

L'histoire du menteur qui doit toujours mentir et de celui qui doit toujours dire la vérité est un vieux problème de logique qui a été publié dans de nombreux ouvrages de récréations mathématiques. Il est possible d'utiliser cette idée pour en faire un tour de mathématique.

### *Ce que voient et entendent les spectateurs*

Le magicien demande à trois spectateurs volontaires de venir sur scène pour jouer une comédie du temps d'Aristote. Il raconte que Aristote était son voisin de palier et qu'il est mort en escaladant le mont Olympe. Mais le magicien précise qu'il s'agit bien d'une comédie et non d'une tragédie grecque.

Dans cette comédie, explique le magicien, il y a un menteur qui doit toujours mentir et une personne qui doit toujours dire la vérité. Les rôles vont changer et c'est le troisième spectateur qui décide qui ment et qui dit la vérité.

Les rôles du menteur et de celui qui toujours la vérité sont distribués une première fois par le magicien. Afin de tester le menteur, il lui pose une question délicate : « J'ai ici un billet de 500 euros, aimeriez-vous que je vous en fasse cadeau ? » Le menteur doit répondre « Non ». Puis, le magicien s'éloigne et le troisième spectateur distribue les rôles sans que personne d'autres que les trois personnes concernées sachent qui est le menteur et qui dit toujours la vérité.

Le magicien remet un petit objet, une pièce de monnaie assez bizarre par exemple, à la personne chargée de distribuer les rôles, puis il se retourne. La pièce est remise secrètement à l'un des deux spectateurs, le menteur ou l'autre, qui la met discrètement dans sa poche.

Les deux spectateurs qui jouent un rôle sont face au public ; le troisième spectateur est dos tourné. Le magicien fait d'abord remarquer qu'il ne sait pas qui

est le menteur ou qui est celui qui dit toujours la vérité. Seuls les trois spectateurs le savent. Il pose alors une question à l'un des deux : « Voici ma question. Réfléchissez bien avant de me répondre. La pièce de monnaie se trouve-t-elle dans la poche de la personne qui ment ? »

Le spectateur répond, par exemple, « Oui ». Le magicien après avoir réfléchi, dit qu'il pense que ce n'est pas la personne qu'il a interrogée qui a la pièce mais l'autre. Il lui demande de sortir la pièce de sa poche ; c'est précisément la personne désignée qui a la pièce.

Les rôles entre les trois spectateurs sont changés. Celui qui distribuait les rôles devient acteur. Le magicien pose alors la question suivante à l'un des deux acteurs : « La pièce que je vous ai confiée est-elle dans la poche de la personne qui dit la vérité ? » Après réponse, le magicien désigne bien la personne qui possède la pièce.

Finalement, la même comédie est refaite en changeant encore une fois celui qui distribue les rôles. Le magicien pose de nouveau la question : « La pièce de monnaie se trouve-t-elle dans la poche de la personne qui ment ? » Il découvre aussitôt le porteur de la pièce.

### ***Le travail caché du magicien***

Ce tour ne nécessite ni matériel ni préparation. C'est la logique de la réponse à la question posée qui permet au magicien de découvrir immédiatement la personne qui possède la pièce de monnaie. Le raisonnement est très simple puisque la première question posée est : « Est-ce le menteur qui a la pièce ? »

— Supposons que la question soit posée au menteur. S'il a la pièce dans sa poche, il doit répondre « Non » à la question puisqu'il doit toujours mentir. S'il n'a pas la pièce, il répondra « Oui » et mentira.

— Supposons à présent que la question soit posée à celui qui doit toujours dire la vérité. S'il a la pièce dans sa poche, il doit répondre « Non » ; s'il ne l'a pas, il répondra « Oui ».

Par conséquent, que le spectateur soit le menteur ou celui qui dit la vérité, celui qui a la pièce dans sa poche répond toujours « Non » ; celui qui ne l'a pas répond toujours « Oui ». Vous n'avez pas besoin de savoir s'il est le menteur ou celui qui dit la vérité.

Lorsque vous posez la question, si le spectateur répond « Non », c'est lui qui a la pièce ; s'il répond « Oui » ce n'est pas lui qui a la pièce et c'est donc l'autre.

Lors de la deuxième répartition des rôles, vous posez la question inverse : « Est-ce celui qui dit la vérité qui a la pièce ? » Cela renverse l'ordre des réponses. Si le spectateur répond « Oui », c'est lui qui a la pièce ; s'il répond « Non » ce n'est pas lui qui a la pièce, c'est l'autre.

Vous inversez de nouveau la question lors de la troisième répartition des rôles. Malgré la simplicité de la démarche logique, vous pouvez être certain que les spectateurs ne trouveront pas la solution à cette petite comédie du menteur découvert malgré lui.

## Naviguez dans le zodiaque

Chacun connaît les signes du zodiaque et en particulier celui qui correspond à sa date de naissance. L'astrologie étant une pratique magique considérée comme sérieuse, il faut présenter la divination suivante en faisant appel aux mânes de Nostradamus et pourquoi pas à celles de Kepler qui, tout astronome scientifique qu'il fut, était également astrologue de son état.

### *Ce que voient et entendent les spectateurs*

Le magicien rappelle que les signes du zodiaque datent de la plus haute antiquité. Les rois et les empereurs avaient à leur service un ou plusieurs astrologues afin de lire l'avenir dans les astres mais également de prévoir les éclipses grâce à leurs connaissances astronomiques. En fait l'astrologie a eu une influence bénéfique sur le développement de l'astronomie.

Le magicien demande à un spectateur s'il connaît bien le signe du zodiaque qui correspond à sa naissance. Il lui remet une feuille de papier et un crayon et, tournant le dos, il le prie d'écrire, en lettres d'imprimerie, le nom de son signe zodiacal. Puis le magicien demande au spectateur d'entourer une lettre du mot qu'il a écrit. Parfois c'est impossible, et le magicien passe à une lettre suivante. Finalement, il devine, peu à peu, quel est le signe zodiacal du spectateur.

### *Le travail caché du magicien*

Le magicien utilise une suite de « questions » en suivant une progression logique parmi les différentes lettres qui existent dans les mots qui désignent les signes du zodiaque. L'astuce est de ne pas poser directement des questions du genre : « Y a-t-il la lettre O dans votre mot ? » Il faut le faire d'une manière détournée en remplaçant les questions par des expressions telles que : « Avec votre crayon, entourez la lettre O. »

La suite logique des lettres à demander est donnée par le tableau suivant où ce sont celles qui apparaissent le plus souvent dans les mots du zodiaque qui doivent être demandées en priorité. C'est évidemment la lettre *E* qui apparaît neuf fois sur douze qui est demandée la première ; puis, c'est la lettre *A* qui apparaît sept fois sur douze ; etc.

La découverte des signes va se faire dans l'ordre suivant :

Lion, scorpion, poisson ; vierge, bélier ; gémeaux, balance ; taureau, capricorne, cancer ; verseau, sagittaire.

La lettre *E* est demandée la première en disant : « Vous allez entourer une lettre du mot que vous avez inscrit, par exemple, la lettre *E*. » Si le spectateur répond que c'est impossible, vous dites que c'était un exemple et que le spectateur doit penser au mot qu'il a écrit afin que vous puissiez capter les lettres de ce mot. S'il n'y a pas de *E*, il s'agit nécessairement des signes : lion, scorpion ou poisson. Vous pouvez donc, sans risque d'erreur, affirmer que vous voyez nettement les lettres *I* et *O* qui flottent au-dessus de l'aura du spectateur.

Ensuite, « Vous ne voyez pas nettement s'il s'agit ou non d'un S. » Si le spectateur répond qu'il ne peut pas entourer de S, il s'agit du Lion ; s'il y a un seul S, il s'agit du scorpion et deux S, ce sont les Poissons.

Après avoir demandé d'entourer la lettre E, si le spectateur répond que c'est possible, vous passez à la lettre A. Le processus se poursuit selon les réponses oui ou non à la possibilité d'entourer les lettres demandées. On a donc le tableau suivant à copier quelque part afin de pouvoir le consulter aisément lorsque vous avez le dos tourné pour poser les questions.

E (non) ; I et O (sûrement oui) ; S (non, Lion), (oui, Scorpion ou Poissons) ; +S (non, Scorpion), (oui, Poissons)  
E (oui) ; A (non) ; I et R (sûrement oui) ; B (oui : Bélier), (non : Vierge)  
A (oui) ; R (non) ; G (oui : Gémeaux), (non : Balance)  
R (oui) ; S (non) ; T (oui : Taureau), (non : Cancer ou Capricorne) ; *il reste seulement trois lettres à entourer* (oui : Cancer), (non : Capricorne)  
S (oui) ; G (oui : Sagittaire), (non : Verseau)

Il faut diversifier la manière d'annoncer la découverte du signe zodiacal. Pour la Balance, par exemple : « Il me semble que vous êtes quelqu'un de très équilibré, ce doit être une sensation que je ressens parce que votre signe du zodiaque est en rapport avec cette sensation. Oui. Ce doit être cela. C'est la Balance. »

Si vous connaissez les dates qui correspondent à chaque signe, vous pouvez aussi vous en servir : « Vous devez être né durant une période chaude de l'année. C'est pour cela que vous dégagez une sympathie qui réchauffe l'atmosphère. »

Rappelons ces dates : Capricorne (21 décembre au 20 janvier), Verseau (21 janvier au 19 février), Poissons (20 février au 20 mars), Bélier (21 mars au 19 avril), Taureau (20 avril au 20 mai), Gémeaux (21 mai au 21 juin), Cancer (22 juin au 22 juillet), Lion (23 juillet au 23 août), Vierge (24 août au 23 septembre), Balance (24 septembre au 23 octobre), Scorpion (23 octobre au 22 novembre), Sagittaire (23 novembre au 20 décembre).

## Divination logique

Le tour suivant a été proposé par le sieur de Méziriac dans un ouvrage paru au début du 17<sup>e</sup> siècle. Nous parlerons plus longuement de cet auteur au cours du quatrième chapitre.

### *Ce que voient et entendent les spectateurs*

Le magicien demande aux spectateurs s'ils pensent, comme le poète, que les objets inanimés ont une âme : « Objets inanimés avez-vous donc une âme, qui s'attache à notre âme et la force d'aimer. »

Quoi qu'il en soit des réponses, il invite trois spectateurs à venir le rejoindre car il suppose que ceux-ci ont une sensibilité particulière envers les objets. Il leur

montre trois petits objets déposés sur une table : une statuette de Bouddha, une tête de mort en ivoire et une fleur. Il montre les objets à tous les spectateurs.

Prenant ensuite 24 jetons, le magicien donne 1 jeton à une première personne, 2 à une deuxième et 3 à la troisième. Il laisse les 18 jetons restants sur la table sur laquelle se trouvent les trois objets. Il tourne alors le dos. Il demande à chacun de prendre un des objets de son choix. Puis il ajoute que la personne qui a la statuette de Bouddha doit prendre autant de jetons qu'elle en a reçu ; que la personne qui a choisi la tête de mort prenne deux fois plus de jetons qu'elle en a déjà reçu ; que la troisième personne prenne quatre fois plus de jetons qu'elle n'en a reçu. Il demande à chacun de caché soigneusement l'objet qu'il a pris ainsi que les jetons.

Le magicien se retourne et demande à chacune des personnes qui participent à l'expérience de toucher l'objet qu'il a pris et de penser aux sentiments que cet objet évoque pour lui. « Objets inanimés avez-vous donc une âme qui s'attache à notre âme » répète-t-il. Puis, captant les ondes qui émanent des sensations de chacun, il révèle quel objet a été pris par chacun.

### ***Le travail caché du magicien***

Vous devez choisir trois objets pouvant engendrer des sentiments éventuellement très forts chez la personne qui en prend un sur la table. Il faut que les jetons deviennent un accessoire sans importance et qu'on arrive presque à les oublier. Vous distribuez les premiers jetons en vous rappelant à qui vous avez donné 1, 2 ou 3 jetons.

C'est le nombre de jetons qui restent sur la table qui va vous permettre de savoir qui a pris tel objet. Après vous être retourné, vous ne regardez pas tout de suite les jetons qui restent. Il faut auparavant mettre vos trois spectateurs en condition puis jeter un coup d'œil pour connaître le nombre de jetons restants.

Il peut rester sur la table 1, 2, 3, 5, 6 ou 7 jetons. Ces six nombres correspondent à six cas possibles de prises des jetons lorsque vous avez le dos tourné. Appelons A, E, I les objets. L'ordre dans lequel vous avez distribué les premiers jetons désignent respectivement la première (1 jeton), la deuxième (2 jetons) et la troisième personne (3 jetons). Si la première personne choisit l'objet A, la deuxième, l'objet E et la troisième l'objet I, nous écrirons cet ordre de choix sous la forme AEI. Il y a ainsi six possibilités de choix : AEI, EAI, AIE, EIA, IAE, IEA. Dans le premier cas, AEI, les trois personnes prennent respectivement 1, 4 et 12 jetons parmi les 18 restants. Il restera donc sur la table 1 seul jeton.

Dans le second cas, EAI, les trois personnes prennent respectivement 2, 2 et 12 jetons. Il restera donc 2 jetons sur la table. Passant en revue les six cas, on obtient le tableau suivant qui indique pour chaque personne l'objet qu'il a pris en fonction du nombre de jetons restants.

Restes	1	2	3	5	6	7
1 <sup>e</sup> personne	A	E	A	E	I	I
2 <sup>e</sup> personne	E	A	I	I	A	E
3 <sup>e</sup> personne	I	I	E	A	E	A

Comment se rappeler la distribution des choix en fonction du nombre de jetons restants? Voici une phrase mnémotechnique donnée par le sieur de Méziriac afin de retrouver aisément cette distribution.

*Par fer, César jadis devint si grand prince.*

En prenant deux par deux les syllabes de cette phrase et en considérant les deux voyelles qui y figurent, on obtient la suite des voyelles qui désignent les objets et qui correspondent aux première et deuxième personnes du tableau précédent. La voyelle correspondant à la troisième personne s'en déduit alors.

S'il reste un jeton, les deux syllabes *Par fer* ont pour voyelles A et E ; la troisième voyelle est donc I. C'est le choix donné par la première colonne du tableau ci-dessus.

S'il reste 2 jetons, la deuxième paire de syllabes, *César*, a pour voyelles E et A ; la troisième voyelle est donc I. C'est la deuxième colonne du tableau ; etc.

### **Exemple**

Les objets A, E, I sont respectivement le Bouddha, la tête de mort et la fleur. S'il reste 6 jetons sur la table, les deux syllabes à considérer sont *si grands*, soit les voyelles I et A. La première personne à qui l'on a donné au début un seul jeton a choisi l'objet I, c'est-à-dire la fleur. La deuxième personne a choisi l'objet A, soit la statuette de Bouddha. Enfin, la troisième personne a choisi l'objet E, la tête de mort.

## **Divertissements et curiosités délectables**

Les problèmes de logique font partie des grands classiques des divertissements mathématiques. La période antique, voire la mythologie, fourmillent d'énigmes que se lançaient les grands du monde de cette époque : rois, héros et demi-dieux. Ainsi en est-il, par exemple, de l'énigme proposée par le Sphinx de Thèbes. Mais de véritables problèmes mathématiques étaient également posés tel celui des *bœufs de Thrynacie*, proposé par Archimède à Ératosthène de Cyrène, chef de file de l'école d'Alexandrie, et que les mathématiciens de cette école ne parvinrent pas à résoudre ; il est vrai que ce problème conduit à un système de sept équations à huit inconnues qui comportent donc plusieurs solutions. Intéressons-nous modestement à de petits problèmes logiques parmi les plus classiques.

### ***Le portrait inconnu***

Un jeune homme contemplait un très beau portrait dans une galerie de tableaux. Un amateur d'art qui passait par-là lui demanda : « Qui regardez-vous ainsi ? »

Le jeune homme répondit par cette énigme : « Je n'ai point de frère ni de sœur mais le père de cet homme, représenté sur le tableau, est le fils de mon père. »

De qui le jeune homme regardait-il le tableau ?