

1^{re} année

Algèbre et géométrie euclidienne

Logique

Assertions

Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \rightarrow \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E .

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$\text{non } P$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P \text{ ou } Q \iff Q \text{ ou } P$
- $P \text{ et } Q \iff Q \text{ et } P$

P , Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (P \text{ ou } Q)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff \text{non}(\text{non}P)$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- **Existentiel** : il existe un élément de E vérifiant P . On note $\exists x \in E, P(x)$.
- **Universel** : tous les éléments de E vérifient P . On note $\forall x \in E, P(x)$.

S'il existe un unique élément de E vérifiant P , on note $\exists! x \in E, P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $\text{non}(\exists x \in E; P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non } P(x))$
- $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E; \text{non } P(x))$
- $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y) \iff \forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$
- $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y) \iff \exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$

Stratégies pour une implication

- 
- $P \Rightarrow Q$
 - $(\text{non } P) \text{ ou } Q$
 - $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$
 - $\text{non}[P \text{ et } \text{non } Q]$

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E . On dit que

- A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B .
- A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.

Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la **réunion** de A et B .
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'**intersection** de A et B .
- $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A dans E .
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est la **différence** de A et B .

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad \mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\} \text{ est la fonction indicatrice de } A.$$

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble défini par $E \times F = \{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$. L'égalité de deux couples (x, y) et (x', y') est définie par $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite :

- **injective** si $(\forall (x, x') \in E \times E), (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$;
- **surjective** si $(\forall y \in F), (\exists x \in E) ; y = f(x)$.

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e. $(\forall y \in F), (\exists ! x \in E) ; y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une **bijection**. On définit une application $f^{-1} : F \rightarrow E$, appelée **application réciproque** de f , par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}.$$

$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \rightarrow E \begin{cases} f \circ g = Id_F \\ g \circ f = Id_E \end{cases} \quad \text{En ce cas, } g = f^{-1} \text{ est l'application réciproque de } f.$$

Composée de bijections

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective} \quad \text{et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$.

- L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$
- L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

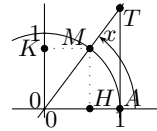
Trigonométrie circulaire

Le cercle trigonométrique

$$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

$$\bullet \cos(x) = \overline{OH}, \sin(x) = \overline{OK}$$

$$\bullet \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ • $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ • $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ • $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ • $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ • $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ • $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

Formules de factorisation

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

$$\forall z \in \mathbb{C} \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy$$

$x = \Re(z)$ est la **partie réelle**
 $y = \Im(z)$ est la **partie imaginaire** de z .

$$z = z' \iff \begin{cases} \Re z = \Re z' \\ \Im z = \Im z' \end{cases}$$

z, z' sont deux nombres complexes.

- La **nombre complexe** $\bar{z} = x - iy$ est le **conjugué** de z .
- Le **nombre réel positif** $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le **module** de z .

Nombres complexes de module 1

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ est l'**exponentielle imaginaire (pure)** d'angle θ .

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ de réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$

Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \quad (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$$

Formules d'Euler et de Moivre

- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Notation exponentielle d'un complexe non nul

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists (\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}, z = \rho e^{i\theta}$$

Forme exponentielle du nombre complexe non nul z .

Si $z \in \mathbf{C}^*$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est le **module** de z et θ est appelé un **argument** de z . On note $\arg(z)$ un argument quelconque de z .

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases} \quad (z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$$

Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z = x + iy$ un complexe présenté en notation algébrique. On définit
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'} \quad (z, z') \in \mathbf{C}^2$$

Racines nièmes du nombre complexe 1

Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. On note $\omega_n = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

ω_n est l'exponentielle imaginaire d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

$$\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}$$

$\mathbf{U}_n$ est l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \dots + \omega_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$$

La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle.

Racines nièmes d'un complexe

L'ensemble des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de $a \in \mathbf{C}^*$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\zeta_0 \omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_0, \zeta_0 \omega_n, \zeta_0 \omega_n^2, \dots, \zeta_0 \omega_n^{n-1}\} \\ &= \{\sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}}\} \end{aligned}$$

où ζ_0 est une solution particulière de $z^n = a$, par exemple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}$.

Équations polynomiales de degré 2

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

$(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, δ est l'une des racines carrées (complexes) de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Système somme-produit

Soit $(\sigma, \rho) \in \mathbf{C}^2$. Alors le couple (z_1, z_2) est solution du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = \sigma \\ z_1 \times z_2 = \rho \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - \sigma z + \rho = 0$.

Nombres complexes et géométrie

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct.

- Au point $M(\frac{x}{y})_{\mathcal{R}}$, on associe son **affiche**, le nombre complexe $z = x + iy$.
- À $z = x + iy$, on associe son **image** dans le plan, le point $M(\frac{x}{y})_{\mathcal{R}}$.
- L'application $z \mapsto z + u$ correspond à la translation du vecteur d'affixe u .
- L'application $z \mapsto \bar{z}$ correspond à la réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
- L'application $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 1$ correspond à la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Géométrie élémentaire dans le plan

Modes de repérage dans le plan

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct (ROND) du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \cdot \vec{i} + \sin(\theta) \cdot \vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta) \cdot \vec{i} + \cos(\theta) \cdot \vec{j}$.

Soit M le point de **coordonnées cartésiennes** (x, y) dans $\mathcal{R}$: $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\theta$.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

(ρ, θ) est un système de **coordonnées polaires** pour M .

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ des ROND. Soit $M \in \mathcal{P}$ un point du plan tel que $M(\frac{x}{y})_{\mathcal{R}}, M(\frac{X}{Y})_{\mathcal{R}'}, \Omega(\frac{x_\Omega}{y_\Omega})_{\mathcal{R}}$. Les coordonnées de M dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont liées par les formules :

$$\begin{cases} X = \cos(\theta)(x - x_\Omega) + \sin(\theta)(y - y_\Omega) \\ Y = -\sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) \end{cases} \quad \theta \equiv (\vec{i}, \vec{I}) [2\pi] \text{ est une mesure de l'angle orienté entre } \vec{i} \text{ et } \vec{I}.$$

Produit scalaire et déterminant de deux vecteurs

Lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $(\vec{u} | \vec{v}) = \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Sinon

- le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par $(\vec{u} | \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$;
- le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff (\vec{u} | \vec{v}) = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$ deux vecteurs du plan

Expression du produit scalaire et du déterminant

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe (BOND) du plan.

- $(\vec{u} | \vec{v}) = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$
- $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{v} &= v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Droites affines du plan

- (S) $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ est un **système d'équations paramétriques** de la droite $\mathcal{D}$ repérée par le point $M_0(x_0, y_0)$ et le vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.
- $\mathcal{D}$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-b, a)$, un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{n}(\frac{a}{b}, \frac{b}{a})$.

$$\begin{array}{l} \updownarrow \\ \bullet M \in \mathcal{D} \\ \bullet \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \\ \bullet (\overrightarrow{AM} \mid \vec{n}) = 0. \end{array}$$

$\mathcal{D}$ est la droite passant par A , dirigée par $\vec{u}$, de vecteur normal $\vec{n}$.

$\mathcal{D}$ admet une équation normale de la forme $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = p$.

Distance d'un point à une droite

- On appelle **projeté orthogonal du point M_0 sur la droite $\mathcal{D}$** , l'unique point H_0 de $\mathcal{D}$ tel que (H_0M_0) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
- On appelle **distance de M_0 à $\mathcal{D}$** , et on note $d(M_0, \mathcal{D})$ la plus courte distance entre M_0 et un point de $\mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A , de vecteur directeur $\vec{u}$, de vecteur normal $\vec{n}$ d'équation cartésienne $ax + by = c$. Alors

$$d(M_0, \mathcal{D}) = M_0H_0 = \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{AM_0}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|(\overrightarrow{AM_0} \mid \vec{n})|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cercles du plan

Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan, $H(\frac{x_0}{y_0})$ un point de $\mathcal{C}$.

- $\mathcal{C}$ a une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$ avec $c + a^2 + b^2 \geq 0$.
- La tangente à $\mathcal{C}$ en H a pour équation $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) = c$.

Géométrie élémentaire de l'espace

Modes de repérage dans l'espace

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un ROND de l'espace et M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On note H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}(O, \vec{i}, \vec{j})$, passant par O , dirigé par $(\vec{i}, \vec{j})$ et orienté par $\vec{k}$.

On pose $\rho = OH$, $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) [2\pi]$, de sorte que

$$\begin{cases} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \\ z &= z \end{cases}$$

(ρ, φ, z) est un système de **coordonnées cylindriques** de M .

On pose $r = OM$, $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) [2\pi]$, $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OM}}, \vec{k}) \in [0, \pi]$ de sorte que :