

Thème 1 - L'oscillateur harmonique

[S1.1] Définition

Le modèle de l'oscillateur harmonique est celui d'un oscillateur sinusoïdal non amorti. Ce modèle, bien qu'idéal, permet de modéliser de nombreux phénomènes réels simples qui s'en approchent.

[S1.2] Équation différentielle de l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle caractérisant un oscillateur harmonique se met sous la forme :

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_{eq}.$$

ω_0 est la pulsation propre du système, homogène à l'inverse d'un temps. Ici s_{eq} représente la position d'équilibre autour de laquelle le système oscille.

✓ Deux oscillateurs mécaniques très courants sont à reconnaître. La fonction s peut représenter la position horizontale d'une masse accrochée à un ressort, habituellement notée x . Pour de faibles valeurs, s peut également être l'angle formé par un pendule simple avec la verticale, noté alors θ .

✓ On utilise souvent les notations $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ et $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

[S1.3] Définitions liées au signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal dépendant du temps se met sous la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

t est la variable. A et ω sont des constantes positives et φ est une constante. On appelle :

- ω la pulsation, grandeur homogène à l'inverse d'un temps ;
- A l'amplitude, grandeur homogène à la dimension de $s(t)$;
- φ la phase à l'origine ou phase initiale sans dimension ;
- $\omega t + \varphi$ l'argument de la fonction cos, c'est la phase instantanée.

✓ D'un point de vue mathématique un signal sinusoïdal peut indifféremment être une expression en sin ou en cos.

✓ L'argument d'une fonction mathématique telle que cos, sin, exp etc. . . est toujours adimensionnée, autrement dit l'intérieur de telles fonctions doit être sans dimension.

[S1.4] Relation entre période, fréquence et pulsation

On note T la période temporelle du signal, aussi appelée période, on note ω sa pulsation et f sa fréquence. On a :

$$f = \frac{1}{T}$$

et aussi :

$$\omega = 2\pi f.$$

✓ L'homogénéité est assurée car f est en $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$, la période T est en s et ω est en rad.s^{-1} donc de dimension homogène à l'inverse d'un temps.

✓ Le radian est une unité d'angle sans dimension.

[S1.5] Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique se conserve. Un oscillateur harmonique correspond à un système qui oscille sans amortissements, en l'absence de frottements. Ainsi pour un oscillateur mécanique on a :

$$E_m(t) = E_m(0) = \text{constante.}$$

✓ La période propre, la fréquence propre et la pulsation propre, sont les grandeurs caractéristiques propres à un système qui oscille sinusoidalement sans amortissements. Elles sont respectivement notées T_0 , f_0 et ω_0 .

✓ Comme l'oscillateur harmonique oscille sans amortissements, les oscillations perdurent à l'infini. Ce cas ne correspond pas à un système réel aussi performant soit-il.

Thème 2 - Ondes et signaux

[S2.1] Déphasage entre deux signaux

Soient deux signaux :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

et :

$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Le déphasage du signal s_2 par rapport au signal s_1 est par définition :

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1.$$

✓ Si les signaux ont même pulsation ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) alors le déphasage du signal s_2 par rapport au signal s_1 est indépendant du temps et dépend simplement des phases à l'origine : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

[S2.2] Représentation de Fresnel

Au signal $s_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$, on associe un vecteur \vec{S}_1 dit de Fresnel dont l'origine est placée à l'origine du repère sur le diagramme de Fresnel, tel que la norme de ce vecteur soit A et tel que l'angle que fait ce vecteur avec l'axe des abscisses soit $\omega t + \varphi_1$. Ci-après, on représente les signaux :

$$s_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = B \cos(\omega t + \varphi_2)$$

et :

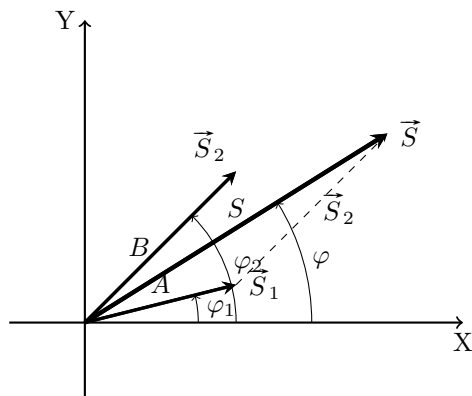
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$$

auxquels on associe alors :

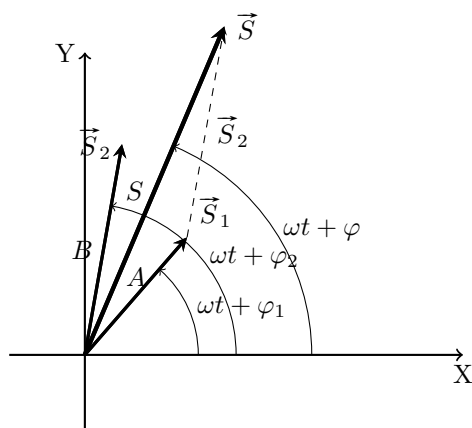
$$\vec{S}_1, \vec{S}_2 \text{ et } \vec{S}$$

avec :

$$\|\vec{S}_1\| = A, \|\vec{S}_2\| = B \text{ et } \|\vec{S}\| = S$$



Représentation à $t = 0$



Représentation à t

[S2.3] Définition d'une onde

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

[S2.4] Forme mathématique

On parle d'onde progressive lorsqu'on peut l'écrire sous la forme de fonctions :

$$f(x - ct) \text{ ou } g(x + ct),$$

ou encore :

$$h(t - x/c) \text{ ou } j(t + x/c).$$

[S2.5] Relation sur λ , c et T

Une onde présente une double périodicité spatiale et temporelle. On note λ la période spatiale et T la période temporelle. La période T , la longueur d'onde λ et la célérité c sont reliées par :

$$\lambda = cT.$$

✓ Comme la fréquence f (ou ν) est reliée à la période par :

$$f = \frac{1}{T},$$

on a également :

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

[S2.6] Ondes stationnaires

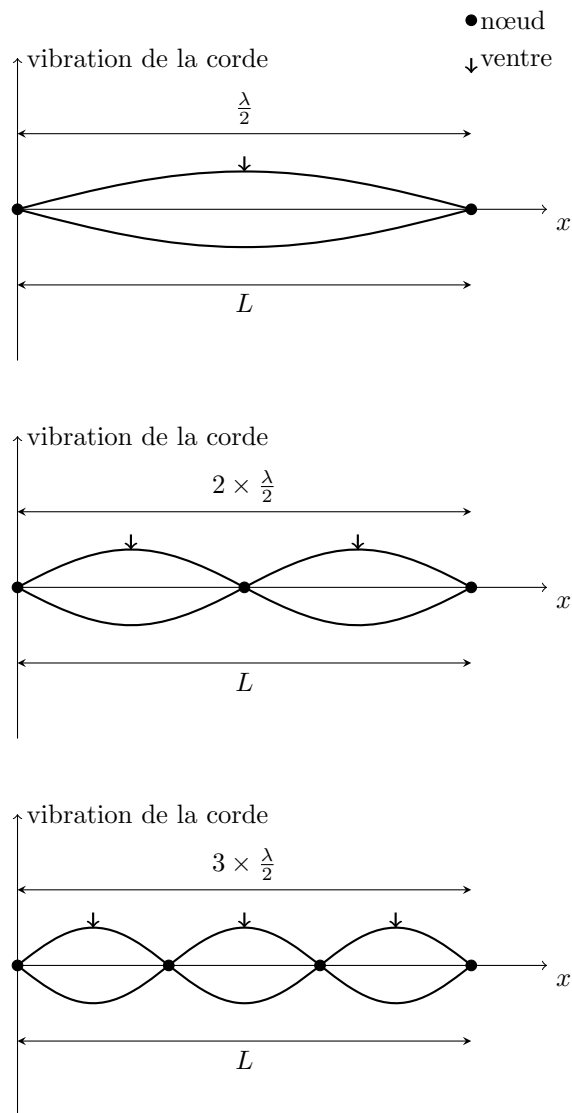
On parle d'onde stationnaire lorsqu'on peut explicitement séparer les dépendances spatiale et temporelle, mathématiquement on peut l'écrire sous la forme d'un produit de deux fonctions :

$$f(x) \times g(t).$$

[S2.7] Modes propres

Certaines conditions aux limites permettent d'établir des ondes stationnaires. Selon la fréquence d'excitation on peut visualiser différents modes propres de vibration. Les minimums vibratoires sont des nœuds de vibration alors que les maximums sont appelés des ventres de vibration.

Ci-après l'allure des vibrations des trois premiers modes propres d'une corde de longueur L qui serait tendue entre deux points fixes à ses extrémités.



Le premier mode propre correspond à la fréquence fondamentale :

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{2c}{L},$$

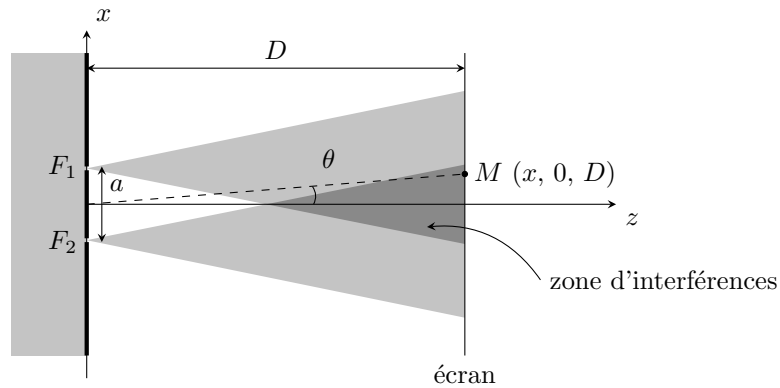
les fréquences suivantes sont appelées les harmoniques et s'expriment comme des multiples entiers de la fondamentale :

$$f_n = n \times f_1.$$

✓ Toute vibration sur une corde par exemple peut être mise sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres.

[S2.8] Interférences

Les interférences s'obtiennent avec des sources monochromatiques de même longueur d'onde, on dit alors que ces sources sont cohérentes. Le dispositif expérimental le plus connu afin d'observer des interférences est celui des fentes d'Young :



Dans la zone d'interférences on observe des franges sur un écran. L'interfrange est donnée par :

$$i = \frac{\lambda D}{a},$$

et la différence de marche entre les vibrations provenant de F_1 et de F_2 est :

$$\delta = \frac{ax}{D}.$$

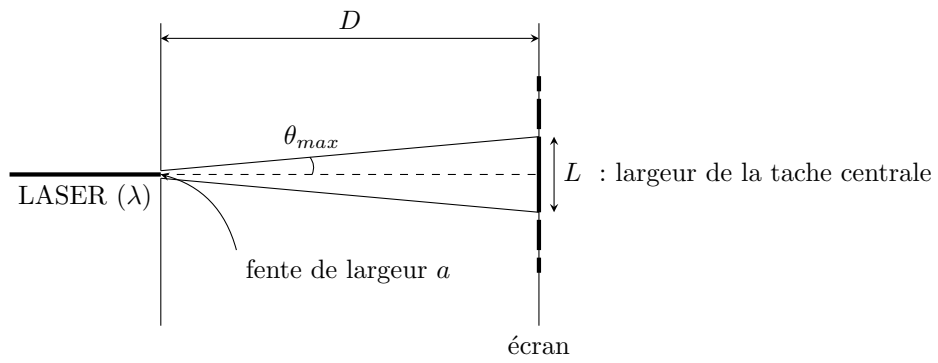
✓ Même si l'exemple le plus célèbre et le plus visuel est optique, les interférences sont possibles avec tout type d'ondes, ainsi il est également possible de rencontrer des interférences sonores par exemple.

[S2.9] Diffraction

La diffraction devient observable si la taille a de l'obstacle est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ . Dans ces conditions l'angle θ du phénomène peut s'approcher grâce à :

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a},$$

L'onde est diffractée et l'obstacle se comporte alors comme plusieurs sources ponctuelles secondaires (principe de Huygens Fresnel).



Dans ce cas, si $D \gg a$ on observe expérimentalement que :

$$\sin \theta_{max} \approx \frac{\lambda}{a}.$$