PROBLÈME 1

▶ Dérivation, minimum, théorème des valeurs intermédiaires

On se propose ici d'appliquer le principe de Fermat concernant l'optique géométrique et à partir de celui-ci retrouver la loi de Snell-Descartes concernant cette même optique géométrique.

Partie A. Mise en place et étude d'une fonction

Un point mobile part de la position A. Il effectue un premier trajet rectiligne AI à la vitesse constante v_1 dans un milieu M_1. Il effectue ensuite un second trajet rectiligne IB à la vitesse constante v_2 dans un milieu M_2.

1. a) Construire une représentation graphique correspondant aux données en plaçant A et B de part et d'autre d'une horizontale sur laquelle figurent leurs projetés orthogonaux respectifs H et K. Le point I est un point quelconque de $[HK]$. On posera $AH = a$, $BK = b$, $HI = x$, $HK = d$. La durée mise par le mobile pour parcourir la distance $AI + IB$ est notée $t(x)$.

   b) Démontrer que le temps de parcourt du point A au point I est $t_1 = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$.

   c) Déterminer le temps de parcourt t_2 de I à B puis en déduire la fonction t de la variable x exprimant le temps de parcourt de A à B en passant par I.

2. a) Déterminer l'expression des dérivées première et seconde de la fonction t.

   b) Étudier les variations de la fonction dérivée t' sur l'intervalle $[0 ; d]$.

   c) Montrer que la fonction dérivée t' ne s'annule sur cet intervalle que pour une valeur x_0.

   d) Déduire de ce qui précède les variations de la fonction t.

Partie B. Le principe de Fermat et la loi de Snell-Descartes

L'angle orienté dans le sens direct $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI})$ est noté α_1 et l'angle orienté $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BI})$ est noté α_2.

Le **principe de Fermat** est un principe physique qui sert de fondement à l'optique géométrique. Il décrit la forme du chemin optique d'un rayon lumineux et s'énonce ainsi « *La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimale.* »

L'indice de réfraction d'un milieu déterminé pour une radiation monochromatique donnée caractérise la vitesse de propagation de cette radiation dans ce milieu. Si v est la vitesse de propagation, l'indice absolu de réfraction est $n = \frac{c}{v}$, c = 299 792 458 m/s étant la vitesse de la lumière dans le vide.

L'angle orienté α_1 pris entre la normale au point d'incidence et le rayon incident est dit angle d'incidence. L'angle orienté α_2 pris entre la normale au point d'incidence et le rayon réfracté est dit angle de réfraction.

La loi de la réfraction s'énonce ainsi :

- le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
- la relation liant les indices de réfraction n_1 et n_2 de chacun des milieux et les angles incident α_1 et réfractés α_2 sont liés par la relation dite de **Snell-Descartes** :

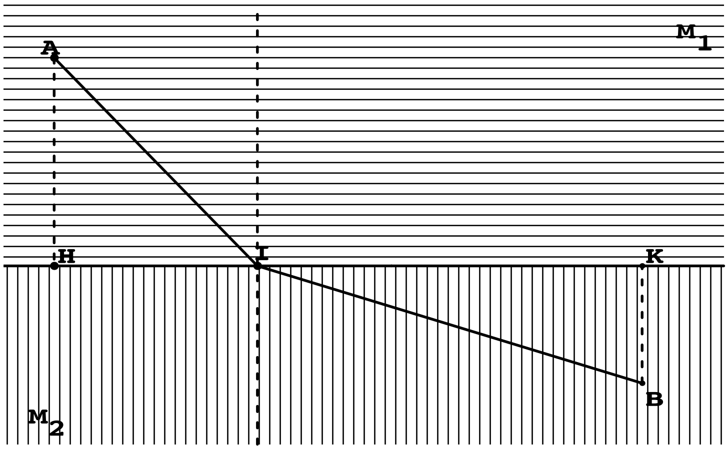
$$n_1 sin(\alpha_1) = n_2 sin(\alpha_2).$$

1. Montrer que pour le point I_0 d'abscisse x_0 qui correspond à la durée minimale $t(x_0)$ notée t_0, on a $sin(\alpha_1) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}$.
2. Établir une relation analogue entre x_0, d, b et $sin(\alpha_2)$.
3. En déduire que la durée du parcours est minimale lorsque la position de I est telle que $\frac{sin\,\alpha_2}{sin\,\alpha_1} = \frac{v_1}{v_2}$.
4. On considère que le parcourt AI_0 est effectué dans un milieu M_1 d'indice absolu de réfraction n_1 et que le parcourt I_0B est effectué dans un milieu M_2 d'indice absolu de réfraction n_2. Montrer que l'on retrouve la loi de Snell-Descartes en reprenant les résultats précédents.

Corrigé problème 1

Partie A

1. a) Représentation graphique de la situation



b) Calcul de $t(x)$: le triangle AHI est rectangle en H, on a $AI^2 = AH^2 + HI^2 = a^2 + x^2$ et par conséquent $AI = \sqrt{a^2 + x^2}$. De la même manière BKI étant un triangle rectangle en K on a $BI^2 = BK^2 + KI^2 = b^2 + (d - x)^2$ et par conséquent $BI = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$ $= \sqrt{(x-d)^2 + b^2}$. Si v_1 est la vitesse de parcourt du trajet AI et $t_1(x)$ le temps mis à le parcourir, on a $AI = v_1 t_1(x)$ et donc $t_1(x) = \dfrac{AI}{v_1} = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}$.

c) Le même type de calcul pour le parcourt IB à la vitesse v_2 pendant un temps t_2 conduit à $t_2(x) = \dfrac{\sqrt{(x-d)^2 + b^2}}{v_2}$. En conclusion le temps mis à parcourir l'itinéraire $AI + IB$ est $t(x) = t_1(x) + t_2(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(x-d)^2 + b^2}}{v_2}$.

2. a) Calcul des dérivées : $t'(x) = \dfrac{1}{v_1}(\sqrt{x^2 + a^2})' + \dfrac{1}{v_2}(\sqrt{(x-d)^2 + b^2})' =$
$\dfrac{1}{v_1}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} + \dfrac{1}{v_2}\dfrac{2(x-d)}{2\sqrt{(x-d)^2 + b^2}} = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \dfrac{1}{v_2}\dfrac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + b^2}}$.

Ensuite, pour la dérivée seconde on a $t''(x) = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{1\sqrt{x^2+a^2} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2}$ + $\dfrac{1}{v_2}\dfrac{1\sqrt{(x-d)^2+b^2} - (x-d)\dfrac{2(x-d)}{2\sqrt{(x-d)^2+b^2}}}{(x-d)^2+b^2} = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$ + $\dfrac{1}{v_2}\dfrac{(x-d)^2+b^2-(x-d)^2}{[(x-d)^2+b^2]\sqrt{(x-d)^2+b^2}}$. Finalement on obtient le résultat suivant :

$$t''(x) = \frac{1}{v_1}\frac{a^2}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{b^2}{[(x-d)^2+b^2]\sqrt{(x-d)^2+b^2}}.$$

b) Sur ce dernier résultat on constate que $t''(x) > 0$ pour tout réel x et donc que la fonction t' est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; d]$.

c) D'une part on a $t'(0) = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{0}{\sqrt{0^2+a^2}} + \dfrac{1}{v_2}\dfrac{0-d}{\sqrt{(0-d)^2+b^2}} = \dfrac{1}{v_2}\dfrac{-d}{\sqrt{(0-d)^2+b^2}}$, ce nombre est négatif.

D'autre part on a $t'(d) = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{d}{\sqrt{d^2+a^2}} + \dfrac{1}{v_2}\dfrac{d-d}{\sqrt{(d-d)^2+b^2}} = \dfrac{1}{v_1}\dfrac{d}{\sqrt{d^2+a^2}}$, ce nombre est positif.

La fonction t' est continue et strictement croissante sur $[0 ; d]$ et $t'(0)\times t'(\mathrm{d}) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que cette fonction s'annule pour une valeur unique x_0 de $]0 ; d[$.

d) D'après ce qui précède, du fait que la fonction t' est croissante, pour $x < x_0$, on a $t'(x) < t'(x_0)$ et donc $t'(x) < 0$ et pour $x > x_0$, on a $t'(x) > t'(x_0)$ et donc $t'(x) > 0$. Pour la fonction t, cela conduit au de variation suivant :

x	0		x_0		d
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t \mapsto t(x)$		$\searrow$	$t_0 = t(x_0)$	$\nearrow$	

Partie B

1. Pour le point I_0 d'abscisse x_0 qui correspond à la durée minimale $t_0 = t(x_0)$, dans le triangle rectangle AI_0H on a $sin(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI_0}) = sin(\alpha_1) = \dfrac{HI_0}{AI_0} = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+a^2}}$. On peut remarquer que l'angle orienté $(\vec{j}, \overrightarrow{I_0A})$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI})$.

2. De même, dans le triangle rectangle BI_0K on a $sin(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BI_0}) = sin(\alpha_2) = \dfrac{I_0K}{I_0B} = \dfrac{d - x_0}{\sqrt{(d - x_0)^2 + b^2}}$. On peut remarquer que l'angle orienté $(-\vec{j}, \overrightarrow{I_0B})$ est égal à l'angle $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BI_0})$.

3. Le parcours est minimal pour $x = x_0$, valeur pour laquelle on a $t'(x_0) = 0$. Cela nous donne $\dfrac{1}{v_1}\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + a^2}} + \dfrac{1}{v_2}\dfrac{x_0 - d}{\sqrt{(x_0 - d)^2 + b^2}} = 0$ ou encore, d'après les résultats précédents, $\dfrac{1}{v_1}sin(\alpha_1) - \dfrac{1}{v_2}sin(\alpha_2)$ soit $\dfrac{1}{v_1}sin(\alpha_1) = \dfrac{1}{v_2}sin(\alpha_2)$. Finalement, on parvient à $\dfrac{sin\,\alpha_2}{sin\,\alpha_1} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

4. Si on revient à l'égalité $\dfrac{1}{v_1}sin(\alpha_1) = \dfrac{1}{v_2}sin(\alpha_2)$, par multiplication par c, la vitesse de la lumière dans le vide, cela donne : $\dfrac{c}{v_1}sin(\alpha_1) = \dfrac{c}{v_2}sin(\alpha_2)$. Or $\dfrac{c}{v_1} = n_1$ et $\dfrac{c}{v_2} = n_2$, donc on peut en conclure que $n_1 sin(\alpha_1) = n_2 sin(\alpha_2)$, ce qui est bien la loi de Snell-Descartes.

Commentaires

- Si un mobile met un temps t à parcourir une distance l à une vitesse constante v, on a $v = \dfrac{l}{t}$.

- La fonction dérivée d'une fonction composée de la fonction racine carrée est donnée par $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- Le théorème des valeurs intermédiaires est le suivant : f étant une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$, si f est continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins une valeur c de $[a\,;\,b]$ telle que $f(c) = k$. Plus particulièrement si $f(a)\times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel c tel que $f(c) = 0$. De plus si f est strictement monotone sur $[a\,;\,b]$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans cet intervalle.

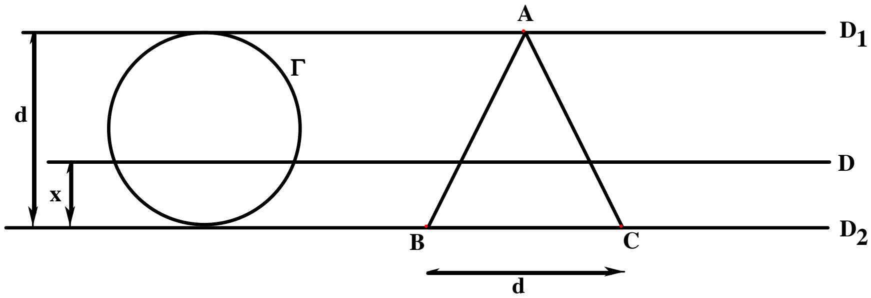
- L'**indice de réfraction** d'un milieu déterminé pour une radiation monochromatique donnée, caractérise la vitesse de propagation de cette radiation dans ce milieu. Si v est la vitesse de propagation, l'indice absolu de réfraction est égal à $n = \dfrac{c}{v}$, c = 299 792 458 m/s étant la vitesse de la lumière dans le vide.
Si v_1 est la vitesse d'une radiation élémentaire dans un milieu M_1 et v_2 la vitesse de cette même radiation dans un milieu M_2, l'indice de réfraction d'un milieu M_1 par rapport à un milieu M_2 est le rapport $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

- La **loi de Snell-Descartes de la réfraction** exprime le changement de direction d'un faisceau lumineux lors de la traversée d'une paroi séparant deux milieux différents. Le rayon lumineux est dit « incident » avant d'avoir rencontré la surface de séparation des deux milieux, il est dit « réfracté » après l'avoir traversée.
Le point I_0, point de passage du milieu M_1 au milieu M_2 est appelé point d'incidence.

PROBLÈME 2

▶ Étude d'un problème de géométrie par la mise en fonction

Sur le même plan sont tracés le cercle (Γ) de diamètre d et le triangle isocèle ABC de sommet A. La base $[BC]$ du triangle a pour longueur d. Le cercle et le triangle sont disposés comme ci dessous :



Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles et tangentes au cercle (Γ) en deux points diamétralement opposés. Le point A est sur (D_1), et les points B et C sont sur (D_2).
Une droite (D) parallèle aux deux premières droites, et à la distance x ($0 \leq x \leq d$) de (D_2), coupe le cercle et le triangle.
On s'intéresse à la somme des longueurs des segments découpés sur la droite (D) par le cercle et le triangle, et l'on cherche s'il existe une autre droite que (D), découpant la même somme de longueurs.

1. Montrer que la somme des longueurs des segments découpés sur (D) est égale à $2\sqrt{dx - x^2} + d - x$.

Pour la suite du problème, on pose $d = 4$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = 2\sqrt{4x - x^2} + 4 - x$.

   a) Justifier que f est dérivable sur $]0 ; 4[$ et déterminer sa dérivée f' sur cet intervalle.

   b) Justifier que $f'(x) < 0$ sur $]2 ; 4[$.

   c) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; 2]$ est le même que celui du trinôme $t(x) = 5x^2 - 20x + 16$.

   d) Montrer que $t(x)$ a deux racines réelles, strictement positives, dont une seule appartient à l'intervalle $]0 ; 2[$. Cette racine est notée x_0.

e) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis en 4. Donner les conséquences graphiques pour la courbe représentative de f.

f) Donner le tableau des variations de la fonction f.

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f, en précisant les tangentes en 0 et en 4.

4. Justifier, avec les questions précédentes, que pour $d = 4$ et pour toute droite (D) parallèle aux droites (D_1) et (D_2) à la distance x de (D_2), il existe une autre droite sur laquelle est découpée « la même somme de longueurs », si et seulement si on a $0 \leq x \leq \dfrac{16}{5}$ et $x \neq x_0$.