

# Chapitre premier

## Quelques éléments de logique

### 1.1 Lettres grecques et symboles mathématiques

$\alpha$ alpha	$\kappa$ kappa	$\tau$ tau	$\Lambda$ Lambda	$\forall$ Pour tout
$\beta$ beta	$\lambda$ lambda	$\upsilon$ upsilon	$\Xi$ Xi	$\exists$ Il existe
$\gamma$ gamma	$\mu$ mu	$\varphi$ phi	$\Pi$ Pi	$\Rightarrow$ Implique
$\delta$ delta	$\nu$ nu	$\chi$ chi	$\Sigma$ Sigma	$\Leftrightarrow$ Equivalent
$\varepsilon$ epsilon	$\xi$ xi	$\psi$ psi	$\Upsilon$ Upsilon	$\cap$ Intersection
$\zeta$ zeta	$\omicron$ omicron	$\omega$ omega	$\Phi$ Phi	$\cup$ Réunion
$\eta$ eta	$\pi$ pi	$\Gamma$ Gamma	$\Psi$ Psi	$\phi$ vide
$\theta$ theta	$\rho$ rho	$\Delta$ Delta	$\Omega$ Omega	$\in$ appartient
$\iota$ iota	$\sigma$ sigma	$\Theta$ Theta		$\subset$ est inclus

### 1.2 Implications et équivalences

Dans ce paragraphe, les symboles  $A$  et  $B$  désignent des propriétés logiques, c'est-à-dire des objets mathématiques exprimés à l'aide d'assemblages de signes mathématiques : quantificateurs, égalité et inégalités, fonctions, ...

A toute propriété logique  $A$ , on peut attribuer une valeur de vérité :  $A$  peut être vraie ou fausse.

La démarche du mathématicien consiste, par application de règles logiques, à déterminer, à partir d'axiomes précisés, si une propriété est vraie ou fausse.

**Définition 1.2.1.** *Implication.*

La proposition  $[A \Rightarrow B]$  veut dire :

*Si la propriété  $A$  est vraie, alors la propriété  $B$  l'est aussi.*

*On dit que la propriété  $A$  implique la propriété  $B$ .*

*La propriété  $A$  s'appelle l'hypothèse.*

*La propriété  $B$  s'appelle la conclusion.*

*Le raisonnement logique qui permet de passer de l'hypothèse  $A$  à la conclusion  $B$  s'appelle la démonstration.*

**Exemple 1.2.2.**

$$a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$$

Lorsque  $[A \Rightarrow B]$  et que la propriété  $A$  n'est pas vraie, on ne peut rien dire a priori de la propriété  $B$ , elle peut être vraie ou fausse.

**Notations 1.2.3.** *Négation.*

*On désigne par non  $A$  la négation de la propriété  $A$ , c'est-à-dire la propriété qui exprime le contraire de la propriété  $A$ .*

**Remarque.**

*i) On a l'équivalence suivante :  $A$  fausse  $\iff$  non  $A$  vraie.*

*ii) Lorsque l'on nie la propriété non  $A$ , c'est-à-dire que l'on considère la propriété non non  $A$ , on retombe sur la propriété  $A$ .*

On verra au paragraphe 1.6 comment nier une propriété mathématique qui s'exprime à l'aide de quantificateurs.

**Définition 1.2.4.** *Contraposée.*

*Un énoncé équivalent à la proposition  $[A \Rightarrow B]$  est  $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$ , c'est-à-dire que lorsque l'on veut démontrer l'implication  $[A \Rightarrow B]$ , on peut procéder par contraposée et démontrer l'implication  $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$ .*

**Exemple 1.2.5.**

*La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par contraposée en :*

$$a^2 \neq 1 \Rightarrow a \neq 1.$$

**Définition 1.2.6.** *Raisonnement par l'absurde.*

*Une autre façon de démontrer l'implication  $[A \Rightarrow B]$  est de procéder par l'absurde, c'est-à-dire de supposer que les propriétés  $A$  et non  $B$  sont vraies toutes les deux et d'en déduire une contradiction.*

**Exemple 1.2.7.**

*La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par l'absurde en :*

$$a = 1 \text{ et } a^2 \neq 1 \text{ est une contradiction.}$$

**Définition 1.2.8.** *Equivalence.*

La proposition  $[A \iff B]$  veut dire que les propriétés  $A$  et  $B$  sont vraies en même temps et donc aussi fausses en même temps, c'est-à-dire que les deux implications suivantes sont vérifiées :

- i)  $[A \Rightarrow B]$  : si la propriété  $A$  est vraie, la propriété  $B$  l'est aussi
- ii)  $[B \Rightarrow A]$  : si la propriété  $B$  est vraie, la propriété  $A$  l'est aussi.

Cette proposition s'exprime en disant :

La propriété  $A$  est équivalente à la propriété  $B$ .

**Exemple 1.2.9.**

Dans  $\mathbb{R}$ , la propriété  $a^2 = 1$  n'est pas équivalente à la propriété  $a = 1$ .

En effet, le réel  $a = -1$  est tel que  $a^2 = 1$  et  $a \neq 1$ .

Donc  $[a = 1 \Rightarrow a^2 = 1]$  et  $[a^2 = 1 \not\Rightarrow a = 1]$ .

Grâce à la définition 1.2.4, lorsque l'on veut démontrer l'équivalence

$$[A \iff B]$$

on peut procéder par contraposée et démontrer l'équivalence

$$[\text{non } A \iff \text{non } B]$$

Des panachages entre les démonstrations directes et les démonstrations par contraposée sont possibles mais dangereux : il faut s'assurer qu'on ne démontre pas deux fois la même chose !

**Exemple 1.2.10.**

Pour démontrer l'équivalence  $[A \iff B]$ , on peut démontrer au choix :

ou bien  $[A \Rightarrow B]$  et  $[B \Rightarrow A]$

ou bien  $[A \Rightarrow B]$  et  $[\text{non } A \Rightarrow \text{non } B]$

ou bien  $[B \Rightarrow A]$  et  $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$

ou bien  $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$  et  $[\text{non } A \Rightarrow \text{non } B]$ .

**1.3 Intersection et réunion**

Dans ce paragraphe,  $F$  et  $G$  désignent des ensembles ou des sous-ensembles d'un ensemble plus grand  $E$ .

**Définition 1.3.1.** *Appartenance et inclusion.*

i) La propriété  $x \in E$  veut dire que  $x$  appartient à  $E$ , ou encore que  $x$  est un élément de l'ensemble  $E$ .

ii) La propriété  $F \subset G$  veut dire que l'ensemble  $F$  est inclus dans l'ensemble  $G$ , c'est-à-dire que si  $x$  appartient à  $F$ , alors il appartient aussi à  $G$ .

**Définition 1.3.2.** *Intersection.*

La propriété  $x \in F \cap G$  veut dire que  $x$  appartient à la fois à  $F$  et à  $G$ , c'est-à-dire :

$$x \in F \text{ et } x \in G.$$

L'ensemble  $F \cap G$  s'appelle l'intersection de  $F$  et  $G$ .

**Exemple 1.3.3.**

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  et  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , alors

$$F \cap G = \{0\}$$

**Définition 1.3.4.** *Réunion.*

La propriété  $x \in F \cup G$  veut dire que  $x$  appartient à  $F$  ou à  $G$ , c'est-à-dire

$$x \in F \text{ ou } x \in G.$$

L'ensemble  $F \cup G$  s'appelle la réunion de  $F$  et  $G$ .

On notera que le ou ici n'est pas exclusif : si  $F$  et  $G$  ont une partie commune, l'élément  $x$  peut être dans cette partie-là.

**Exemple 1.3.5.**

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  et  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , alors

$$F \cup G = \mathbb{R}$$

**Définition 1.3.6.** *Complémentaire.*

Si  $F$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $E$ , le complémentaire  $F^c$  de  $F$  dans l'ensemble  $E$  est défini par :

$$F^c = \{x \in E \mid x \notin F\}$$

La notation  $F^c$  ne fait pas apparaître l'ensemble  $E$ . Lorsqu'il est nécessaire de préciser cet ensemble, on pourra employer la notation plus précise  $F_E^c$  ou encore  $E \setminus F$ , comme dans 1.3.12.

**Proposition 1.3.7.**

Si  $F$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $E$ , alors  $(F^c)^c = F$ .

*Démonstration.* Pour montrer cette propriété, il suffit de remarquer qu'une double négation revient à une affirmation.  $\square$

**Exemple 1.3.8.**

1) Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ , alors

$$F^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

2) Soit  $E = \mathbb{C}$ ,  $F = \{z \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{R} \text{ et } z > 0\}$ , alors

$$F^c = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{R} \text{ et } z \leq 0\}$$

**Proposition 1.3.9.**

Soit  $F$  et  $G$  deux un sous-ensembles d'un ensemble  $E$  tels que  $F \subset G$ . Alors

$$G^c \subset F^c$$

*Démonstration.* L'inclusion  $F \subset G$  se traduit par : si  $x \in F$ , alors  $x \in G$ .

La contraposée de cette proposition est : si  $x \notin G$ , alors  $x \notin F$ , ce qui veut bien dire que  $G^c \subset F^c$ .  $\square$

**Proposition 1.3.10.**

Soit  $F$  et  $G$  deux un sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

i) La propriété  $x \in (F \cap G)^c$  s'exprime par  $x \in F^c \cup G^c$ , soit

$$(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$$

ii) La propriété  $x \in (F \cup G)^c$  s'exprime par  $x \in F^c \cap G^c$ , soit

$$(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$$

En d'autres termes, la négation de *et* est *ou* et celle de *ou* est *et*.

*Démonstration.* i) Soit  $x \in (F \cap G)^c$ . Ceci veut dire que  $x$  n'est pas dans l'intersection de  $F$  et  $G$ , ce qui veut encore dire que ou bien  $x$  n'est pas dans  $F$  ou bien  $x$  n'est pas dans  $G$ , le ou n'étant pas exclusif.

Donc  $x$  est bien dans  $F^c \cup G^c$ .

Réciproquement, si  $x \in F^c \cup G^c$ , alors  $x$  est dans  $F^c$  ou dans  $G^c$ , donc il n'est pas dans  $F$  ou il n'est pas dans  $G$ , donc il n'est pas dans  $F \cap G$ , soit  $x \in (F \cap G)^c$ .

ii) On utilise le i) en échangeant les rôles de  $F$  et  $G$  et ceux de  $F^c$  et  $G^c$  :

$$(F^c \cup G^c)^c = ((F \cap G)^c)^c = F \cap G$$

$\square$

**Exemple 1.3.11.**

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  et  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , alors

$$F^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \quad \text{et} \quad G^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

D'où :

$$(F \cap G)^c = (\{0\})^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = F^c \cup G^c$$

$$(F \cup G)^c = \mathbb{R}^c = \emptyset = F^c \cap G^c$$

où  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide.

**Définition 1.3.12.** *Différence ensembliste.*

La différence ensembliste  $F \setminus G$  de deux sous ensembles  $F$  et  $G$  de  $E$  est définie par :  $x \in F \setminus G$  si et seulement si  $x$  appartient à  $F$  et n'appartient pas à  $G$ .  
C'est-à-dire

$$F \setminus G = F \cap G^c$$

Remarquons que cette différence ne dépend pas de l'ensemble  $E$ .

**Exemple 1.3.13.**

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  et  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , alors

$$F \setminus G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

**Définition 1.3.14.** *Différence symétrique.*

La différence symétrique  $F \Delta G$  de deux sous ensembles  $F$  et  $G$  de  $E$  est définie par :  $x \in F \Delta G$  si et seulement si  $x$  appartient à  $F$  et n'appartient pas à  $G$  ou bien si  $x$  appartient à  $G$  et n'appartient pas à  $F$ .  
C'est-à-dire

$$F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G)$$

Cette définition revient à donner à ou son sens exclusif : l'élément  $x$  est dans  $F$  ou dans  $G$  mais pas dans les deux à la fois.

**Exemple 1.3.15.**

Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  et  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , alors

$$F \Delta G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

## 1.4 Quantificateurs

Les quantificateurs servent à exprimer des propriétés.

Le quantificateur  $\forall$  se lit *pour tout* et le quantificateur  $\exists$  se lit *il existe*.

### Exemple 1.4.1.

$\exists x \in \mathbb{R}$  tel que  $x^2 = 1$ .

Cette propriété est vraie : le nombre réel  $x = 1$  convient.

### Exemple 1.4.2.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| = \pm x$ .

Cette propriété est vraie : si le nombre réel  $x$  est positif, il est égal à sa valeur absolue, s'il est négatif il est égal à l'opposé de sa valeur absolue et s'il est nul, il est égal à la fois à sa valeur absolue et à l'opposé de sa valeur absolue.

Une propriété exprimée avec des quantificateurs peut être vraie ou fausse selon le cadre dans lequel on se place. Pour montrer qu'une propriété est fausse, il suffit d'exhiber un *contre-exemple*, voir 1.6.2, c'est-à-dire un exemple qui nie la propriété en question.

### Exemple 1.4.3.

$\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = \pm z$ .

Cette propriété est fausse, on peut trouver un nombre complexe qui ne la vérifie pas : en effet le nombre complexe  $z = 1 + i$  est tel que  $|z| = \sqrt{2} \neq \pm(1 + i)$ .

La comparaison des exemples 1.4.2 et 1.4.3 montre qu'il faut bien préciser le domaine où l'on travaille.

## 1.5 Ordre des quantificateurs

Une propriété peut s'exprimer à l'aide de plusieurs quantificateurs. Dans ce cas, l'ordre dans lequel ils sont écrits est primordial, le sens de la propriété peut être radicalement modifié si l'on intervertit certains quantificateurs.

### Exemple 1.5.1.

1) *Continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :*

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall t \in ]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ ,  $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$ .

2) *Continuité uniforme de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :*

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $|t - t'| \leq \alpha$ ,  $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$ .

Dans l'assertion 1), le nombre  $\alpha$  dépend de  $t_0$  : si l'on change le point  $t_0$  en lequel on étudie la continuité de  $f$ , ce nombre peut être modifié.

Dans l'assertion 2), le nombre  $\alpha$  ne dépend pas du point  $t$  : le même  $\alpha$  convient pour tous les points  $t$  en lesquels on étudie la continuité de  $f$ .

On peut remarquer que la propriété 2) implique la propriété 1) mais que l'inverse est faux. Ces deux propriétés ne sont donc pas équivalentes.

**Exemple 1.5.2.** La fonction  $f$ , définie pour  $t \in \mathbb{R}$  par  $f(t) = t^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  mais on verra dans l'exemple 1.6.4 qu'elle n'y est pas uniformément continue.

La règle pour ne pas modifier le sens d'une propriété comprenant plusieurs quantificateurs est la suivante : on ne peut pas intervertir deux quantificateurs consécutifs distincts ; en revanche, deux quantificateurs consécutifs de même nature sont indiscernables donc leur ordre d'apparition n'a pas d'importance.

Il existe une notation différente, qui est équivalente à celle des propriétés 1) et 2) de l'exemple 1.5.1, mais où le *dernier* quantificateur  $\forall$  est omis :

**Exemple 1.5.3.**

1) *Continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

2) *Continuité uniforme de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |t - t'| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \varepsilon.$$

## 1.6 Négation

Pour nier une phrase mathématique, c'est-à-dire pour écrire le contraire d'une propriété comprenant des quantificateurs, on inverse tous les quantificateurs, c'est-à-dire que l'on remplace  $\forall$  par  $\exists$  et  $\exists$  par  $\forall$ , sans en changer l'ordre et on nie la conclusion.

**Exemple 1.6.1.** *Discontinuité de  $f$  en  $t_0$  :*

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \alpha > 0, \exists t \in ]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[ \text{ tel que } |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon.$$

**Remarque.** il ne faut pas oublier d'inverser le quantificateur  $\forall$  lorsqu'il est sous-entendu, comme dans l'exemple 1.5.3.