Chapitre premier
Quelques éléments de logique

1.1 Lettres grecques et symboles mathématiques

α alpha	κ kappa	τ tau	Λ Lambda	$\forall$ Pour tout
β beta	λ lambda	υ upsilon	Ξ Xi	$\exists$ Il existe
γ gamma	μ mu	φ phi	Π Pi	$\Rightarrow$ Implique
δ delta	ν nu	χ chi	Σ Sigma	$\Longleftrightarrow$ Equivalent
ε epsilon	ξ xi	ψ psi	Υ Upsilon	$\cap$ Intersection
ζ zeta	o omicron	ω omega	Φ Phi	$\cup$ Réunion
η eta	π pi	Γ Gamma	Ψ Psi	ϕ vide
θ theta	ρ rho	Δ Delta	Ω Omega	$\in$ appartient
ι iota	σ sigma	Θ Theta		$\subset$ est inclus

1.2 Implications $[A \Rightarrow B]$ et équivalences $[A \iff B]$

Dans ce paragraphe, les symboles A et B désignent des propriétés logiques, c'est-à-dire des objets mathématiques exprimés à l'aide d'assemblages de signes : quantificateurs, égalité, fonctions, ...

A toute propriété logique A, on peut attribuer des valeurs de vérité : A peut être vraie ou fausse.
La démarche du mathématicien consiste, par application de règles logiques, à déterminer, à partir d'axiomes précisés, si une proposition est vraie ou fausse.

1.2.1 Définition. *Implication.*
La proposition $[A \Rightarrow B]$ veut dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi.

En revanche, si la propriété A n'est pas vraie, on ne peut rien dire de la propriété B.

1.2.2 Exemple. $a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$.

Cette proprosition s'exprime en disant que la propriété A implique la propriété B. La propriété A s'appelle *l'hypothèse* et la propriété B s'appelle *la conclusion*.

Le raisonnement logique qui permet de passer de l'hypothèse A à la conclusion B s'appelle *la démonstration*.

Un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \Rightarrow B]$ est [non $B \Rightarrow$ non A] : lorsque l'on veut démontrer $[A \Rightarrow B]$, on peut procéder *par contraposée* et démontrer [non $B \Rightarrow$ non A].

1.2.3 Exemple. *La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par contraposée en :*

$$a^2 \neq 1 \Rightarrow a \neq 1.$$

Une autre façon de démontrer la proposition $[A \Rightarrow B]$ est de procéder par *l'absurde*, c'est-à-dire de supposer que les propriétés A et non B sont vraies toutes les deux et d'en déduire une *contradiction*.

1.2.4 Exemple. *La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par l'absurde en :*

$$a = 1 \text{ et } a^2 \neq 1 \text{ est une contradiction.}$$

1.2.5 Définition. *Equivalence.*
La proposition $[A \iff B]$ veut dire que les propriétés A et B sont vraies en même temps et donc aussi fausses en même temps, c'est-à-dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi, c'est-à-dire $[A \Rightarrow B]$ et si la propriété B est vraie, alors la propriété A l'est aussi, c'est-à-dire $[B \Rightarrow A]$.
Cette proprosition s'exprime en disant que la propriété A est équivalente à la propriété B.

Comme précédemment, un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \iff B]$ est [non $A \iff$ non B]. Lorsque l'on veut démontrer $[A \iff B]$, on peut procéder *par contraposée* et démontrer [non $A \iff$ non B].

1.2.6 Exemple. *Dans $\mathbb{R}$, la propriété $a^2 = 1$ n'est pas équivalente à la propriété $a = 1$.*

En effet, le réel $a = -1$ est tel que $a^2 = 1$ et $a \neq 1$.
Donc $[a = 1 \Rightarrow a^2 = 1]$ et $[a^2 = 1 \not\Rightarrow a = 1]$.

Des panachages entre les démonstrations directes et les démonstrations par contraposée sont possibles mais dangereux : il faut s'assurer qu'on ne démontre pas deux fois le même sens !

1.2.7 Exemple. *Pour démontrer que* $[A \iff B]$*, on peut démontrer au choix :*
ou bien $[A \Rightarrow B\,]$*et* $[B \Rightarrow A]$
ou bien $[A \Rightarrow B]$ *et* [non $A \Rightarrow$ non B]
ou bien $[B \Rightarrow A]$ *et* [non $B \Rightarrow$ non A]
ou bien [non $B \Rightarrow$ non A] *et* [non $A \Rightarrow$ non B].

1.3 Intersection et réunion

Dans ce paragraphe, P et Q désignent des ensembles ou des sous-ensembles d'un ensemble plus grand.

La proposition $x \in P \cap Q$ veut dire que x appartient à la fois à P et à Q, c'est-à-dire :

$$x \in P \text{ et } x \in Q.$$