SAVOIRS

Thème 1 - Matrices et systèmes linéaires

[S1.1] Définition des ensembles de matrices

Une matrice est un tableau de nombres $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ que l'on représente de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Le premier indice indique le numéro de la ligne du coefficient, le deuxième indice indique son numéro de colonne.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Lorsque $n = p$, cet ensemble est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les matrices à n lignes et n colonnes sont appelées matrices carrées d'ordre n.

[S1.2] Opérations dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On définit la somme de deux matrices et le produit d'une matrice par un scalaire de la façon suivante :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}, \qquad kA = (ka_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.$$

où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ sont deux matrices et k un scalaire.

[S1.3] Produit matriciel

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit des matrices A et B, noté AB, est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}}$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, q\}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Le coefficient $c_{i,j}$ est la somme des produits des coefficients de la ligne i de la matrice A par les coefficients de la colonne j de la matrice B.

✓ Le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ n'a aucun sens si $p \neq q$.

[S1.4] Matrice transposée

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A notée ${}^{t}\!A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}.$$

Autrement dit, les colonnes de ^tA sont les lignes de A, les lignes de ^tA sont les colonnes de A.
Lorsque la matrice A est carrée d'ordre n, la matrice ^tA est également carrée d'ordre n. Lorsque $^tA = A$, on dit que A est symétrique. Lorsque $^tA = -A$, on dit que A est antisymétrique.

✓ Si la matrice A est une matrice carrée d'ordre n antisymétrique alors, pour tout $i \in \{1, \dots n\}$, $a_{i,i} = 0$.

[S1.5] Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est :
- diagonale lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$ (tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls) ;
- triangulaire supérieure lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$ (tous les coefficients au-dessous de la diagonale sont nuls) ;
- triangulaire inférieure lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$ (tous les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls).

[S1.6] Inverse d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Une telle matrice, si elle existe, est unique. On l'appelle, dans ce cas, l'inverse de A et on la note A^{-1}.

✓ On a l'équivalence : $AB = I_n \iff BA = I_n$. Autrement dit, si $AB = I_n$ ou si $BA = I_n$ on peut conclure immédiatement que A est inversible d'inverse B.

[S1.7] Inverse d'un produit de matrices carrées

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n inversibles alors le produit AB est inversible et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

[S1.8] Inverse de la transposée d'une matrice carrée

Si A est une matrice carrée inversible alors sa transposée ^tA est inversible et :

$$(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

[S1.9] Inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

[S1.10] Inversibilité d'une matrice triangulaire (ou diagonale)

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les coefficients de sa diagonale sont non nuls.

En particulier, si les coefficients $d_1, \ldots, d_n$ sont tous non nuls, la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$.

[S1.11] Système linéaire, système linéaire homogène

Un système à n équations et p inconnues x_1, x_2, …, x_p est dit linéaire s'il peut s'écrire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

✓ En posant $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, le système ci-dessus est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Le système linéaire est dit homogène lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

[S1.12] Système de Cramer

Un système linéaire est un système de Cramer lorsqu'il admet une unique solution.

✓ Le système écrit matriciellement $AX = B$ est de Cramer si et seulement si A est une matrice carrée inversible. Dans ce cas $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. Si, de plus, le système est homogène, l'unique solution est $X = 0$.

Thème 2 - Nombres complexes et polynômes

[S2.1] Notation algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique :

$$z = x + \mathrm{i}y,$$

où x et y sont deux nombres réels et i est le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On dit que x est la partie imaginaire de z et y sa partie imaginaire.

[S2.2] Module et argument

Tout nombre complexe z, peut être représenté dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par le point M de coordonnées (x, y) où x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire.

On dit que z est l'affixe du point M.

Le module de z, noté $|z|$, est la longueur du segment $[OM]$.

Si $z \neq 0$, un argument de z, noté $\arg z$, est l'angle de vecteurs $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

L'argument d'un complexe non nul est défini à 2π près.

✓ L'argument de 0 n'est pas défini. Si z est un complexe non nul de module r et d'argument θ, on a $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre z.

[S2.3] Notation exponentielle

On définit l'exponentielle complexe par :

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Ainsi, tout complexe z non nul s'écrit :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

où r est le module de z et θ un argument de z.

Cette écriture est la forme exponentielle du nombre complexe z.

Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}na} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}a})^n.$$

[S2.4] Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

[S2.5] Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

[S2.6] Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué de $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est le complexe $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y.$$

✓ Les points d'affixe z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

Si $z \neq 0$, on peut écrire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}$ et on a :

$$\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

[S2.7] Polynôme, degré et coefficient dominant

Un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ s'écrit :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $n \in \mathbf{N}$ et $a_k \in \mathbf{K}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P est n et que son coefficient dominant est a_n. Si tous les coefficients de P sont nuls, on dit que le degré de P est $-\infty$.

✓ On identifie le polynôme P et sa fonction polynomiale associée, c'est-à-dire la fonction $x \longmapsto P(x)$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathbf{K}[X]$. L'ensemble des polynômes de degré au plus n est noté $\mathbf{K}_n[X]$.

[S2.8] Division euclidienne

Soit A un polynôme et B un polynôme non nul. La division euclidienne de A par B s'écrit :

$$A = QB + R,$$

où Q et R sont deux polynômes tels que le degré de R est strictement inférieur au degré de B. Les polynômes Q et R sont appelés respectivement quotient et reste dans la division de A par B.

✓ Si $R = 0$, on a $A = QB$. On dit alors que B divise A ou que B est un diviseur de A ou encore que A est un multiple de B.

[S2.9] Racine d'un polynôme, ordre de multiplicité

On dit que $\alpha \in \mathbf{K}$ est une racine d'un polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$. Dans ce cas $(X - \alpha)$ divise le polynôme P.

✓ Un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}$ a au plus n racines.

Soit m un entier. Si $(X - \alpha)^m$ divise P et $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P, on dit que m est l'ordre de multiplicité de α.

✓ Si α est une racine alors son ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 1. Sinon son ordre de multiplicité est 0.

[S2.10] Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de degré non nul à coefficients dans $\mathbf{C}$ admet une racine.

✓ Puisque $\mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X]$, tout polynôme réel non constant admet une racine complexe.

Thème 3 - Suites de nombres réels

[S3.1] Le vocabulaire sur l'ensemble $\mathbf{R}$

Soit E une partie non vide de $\mathbf{R}$.

– On dit que $M \in \mathbf{R}$ est un majorant de E lorsque :

$$\forall x \in E,\ x \leq M.$$

– Si E admet un majorant, le plus petit d'entre eux est appelé la borne supérieure de E. Sinon, on dit que la borne supérieure de E est $+\infty$.

– S'il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ x \leq x_0,$$

alors on dit que E admet x_0 pour maximum. Donc ce cas x_0 est aussi la borne supérieure de E.

✓ Un sous-ensemble majoré de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure mais n'admet pas toujours un maximum. C'est le cas, par exemple, de l'intervalle $[0, 1[$ qui ne contient pas d'élément plus grand que tous les autres.

On définit de même minorant, borne inférieure et minimum d'un ensemble.

– On dit que $m \in \mathbf{R}$ est un minorant de E lorsque :

$$\forall x \in E,\ x \geq m.$$

– Si E admet un minorant, le plus grand d'entre eux est appelé la borne inférieure de E. Sinon, on dit que la borne inférieure de E est $-\infty$.

– S'il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ x \geq x_0,$$

alors on dit que E admet x_0 pour minimum. Donc ce cas x_0 est aussi la borne inférieure de E.

[S3.2] La valeur absolue d'un réel

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

✓ Cette inégalité est appelée inégalité triangulaire. Il y a égalité si et seulement si les réels x et y sont de même signe.