Chapitre 1

Les entiers naturels

Les nombres entiers naturels sont à la base de l'Arithmétique, et des Mathématiques. Il ne s'agit pas dans ce cours d'examiner « pourquoi » ils sont là, mais « comment » ils adviennent. La Théorie des Ensembles, qui n'est pas présentée ici, permet de construire un **nombre entier naturel**, ou **nombre cardinal fini**, comme étant un ensemble de **cardinal fini**. L'axiome stipulant ***l'existence d'un ensemble infini*** conduit au théorème : *il existe un ensemble unique, noté* $\mathbb{N}$*, tel que la relation* $x \in \mathbb{N}$ *équivaut à la relation « x est un nombre cardinal fini », et l'ensemble* $\mathbb{N}$ *est infini*. Cette construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ exige qu'on définisse les *nombres cardinaux*, la *relation d'ordre usuelle* entre ceux-ci, la *somme* de deux nombres cardinaux, puis un nombre cardinal *fini* et que l'on constate que ces derniers existent :

$$card\,\emptyset\ , \quad card\,\{\emptyset\}\ , \quad card\big\{\emptyset,\{\emptyset\}\big\}\ , \quad card\Big\{\emptyset,\{\emptyset\}\,,\big\{\emptyset,\{\emptyset\}\big\}\Big\} \quad etc$$

qu'on établisse le « principe de récurrence », enfin qu'on démontre le théorème énoncé plus haut. Souvent on simplifie l'expression « nombre entier naturel » en l'expression « entier naturel ». Les entiers naturels « mathématiques » fournissent un modèle des entiers « naïfs » $0, 1, \ldots,$:

$$0 = card\,\emptyset\ , \quad 1 = card\,\{\emptyset\}\ , \quad 2 = card\big\{\emptyset,\{\emptyset\}\big\}\ , \quad 3 = card\Big\{\emptyset,\{\emptyset\}\,,\big\{\emptyset,\{\emptyset\}\big\}\Big\}$$

qui sont tous ainsi représentés, si tant est qu'on puisse donner un sens à « tous les entiers naïfs » ; le mot « naïf » étant utilisé par opposition à « mathématique ». Mais les entiers naturels « mathématiques » représentent-ils seulement tous les entiers « naïfs » ? La puissance de l'esprit humain semble incomparable puisqu'à partir l'ensemble vide, qui ne contient rien mais qui n'est pas rien, on construit « tout ».

Dans ce cours, on **admet** évidement la Théorie des Ensembles, **mais en remplaçant** « **l'axiome de l'infini** », **c'est à dire l'axiome stipulant l'existence d'un ensemble infini**, **par** « **l'axiome de Peano** ». Ce choix renverse en quelque sorte la démarche décrite plus haut, et s'avère plus abordable ; il permet de définir les ensembles finis, et de constater ensuite qu'il existe un ensemble infini. Ce sont les mathématiciens R. Dedekind et G. Peano qui eurent l'idée de cette axiomatique à la fin du XIX^e siècle.

La numérotation des chapitres, sections, sous-sections, théorèmes, etc. utilise les entiers naïfs.

1.1 Axiome de Peano et entiers naturels

1.1.1 Quelques rappels de Théorie des Ensembles

Bien qu'il soit hors de propos de récapituler, dans cet ouvrage, les axiomes de la Théorie des Ensembles, il convient de rappeler que les notions de ***paire*** $\{a,b\}$, de ***singleton*** $\{a\}$, sont des concepts de base capitaux. Par exemple, un axiome de la Théorie des Ensembles, appelé *axiome de la paire*, assure que quels que soient les termes a et b de la théorie, il existe un unique ensemble X ayant la propriété :

$$\forall x \,\big((x \in X) \Longleftrightarrow (x = a \ \ ou \ \ x = b)\big)$$

Cet ensemble est la **paire** $\{a,b\}$, dont tout élément est a, ou est b. Lorsque $a = b$, cet ensemble est le **singleton** $\{a\}$, dont tout élément est a. De ces concepts on peut en déduire d'autres ; le concept de ***couple*** (x,y), de ***triplet*** (x,y,z), de ***graphe***, de ***graphe fonctionnel***, de ***produit cartésien*** d'une paire d'ensembles, d'***application*** d'un ensemble dans un autre, etc. Par exemple, le **couple** (x,y) est, par définition, la paire $\big\{x,\{x,y\}\big\}$, le **triplet** (x,y,z) est le couple $\big((x,y),z\big)$.

Le théorème de Bernstein, qui sera plusieurs fois utilisé, est énoncé ci-après et succinctement démontré.

Théorème 1.1. ***Théorème de Bernstein***

Soient deux ensembles non vide E et F pour lesquels existent les injections $E \xrightarrow{\mathbf{f}} F$ et $F \xrightarrow{\mathbf{g}} E$. Alors les ensembles E et F sont équipotents.

Démonstration. Considérons l'application φ de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$, formé des parties de l'ensemble E, dans lui-même, définie par :

$$\varphi(A) = E \setminus g\big(F \setminus f(A)\big)$$

Immédiatement on constate que l'application φ est croissante en le sens suivant :

$$A \subset B \Longrightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$$

$\Phi = \big\{A \in \mathscr{P}(E) \ ; \ A \subset \varphi(A)\big\}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$, et la partie $M = \bigcup\limits_{A \in \Phi} A$ de l'ensemble E est un point fixe de l'application φ, c'est-à-dire $\varphi(M) = M$. On forme alors l'application h de l'ensemble E dans l'ensemble F :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & si \quad x \in M \\ \big\{h(x)\big\} = g^{-1}(x) & si \quad x \notin M \end{cases}$$

Des considérations élémentaires conduisent au fait que l'application h est bijective. $\square$

1.1.2 L'axiome de Peano

Comme indiqué dans l'introduction, l'axiome de l'infini de la Théorie des Ensembles est remplacé par l'axiome de Peano. Cet axiome affirme **l'existence** *d'un* ***triplet*** $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ *où* $\mathbb{N}$ *désigne un* ***ensemble****,* 0 *un* ***élément*** *de cet ensemble et* $\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$ *une* ***application*** *possédant les trois propriétés :*

P_1 : l'application σ est injective

P_2 : l'image de l'application σ est le sous-ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, qu'on note $\mathbb{N}^*$.

P_3 : tout sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ ayant les deux propriétés :

$$\begin{cases} 0 \in E \\ \forall n \left((n \in E) \Longrightarrow (\sigma(n) \in E) \right) \end{cases}$$

est égal à l'ensemble $\mathbb{N}$.

L'élément $\sigma(n)$ s'appelle le *successeur* de n. La seconde propriété de E dans P_3 peut s'énoncer *E est stable par σ*. **La propriété P_3 est le « principe » de récurrence**.

Revenant un instant à l'autre option évoquée dans l'introduction, l'objet $0 = card\,\emptyset$ est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ des cardinaux finis, le plus petit, et l'application σ est définie par $\sigma(n) = n + 1$, à savoir $\sigma(n)$ est la somme des cardinaux n et $1 = card\,\{\emptyset\}$.

1.1.3 Les nombres entiers naturels

Théorème 1.2.

Soient un triplet $(\mathscr{E}, a, \varphi)$ où $\mathscr{E}$ désigne un ensemble non vide, a l'un de ses éléments, $\mathscr{E} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{E}$ une application, et un autre triplet $(\mathscr{N}, e, \sigma)$ possédant les propriétés P_1, P_2 et P_3. Alors il existe alors une unique application $\mathscr{N} \xrightarrow{u} \mathscr{E}$ vérifiant les deux égalités :

$$\begin{cases} u(e) = a \\ \\ u \circ \sigma = \varphi \circ u \end{cases}$$

Démonstration. ***Existence de l'application*** *u*. On considère l'application :

$$\mathscr{N} \times \mathscr{E} \xrightarrow{\phi} \mathscr{N} \times \mathscr{E} \quad \phi(n,x) = \left(\sigma(n), \varphi(x)\right)$$

et le sous-ensemble $\mathscr{J}$ de $\mathscr{P}\left(\mathscr{N} \times \mathscr{E}\right)$:

$$\mathscr{J} = \left\{ A \in \mathscr{P}\left(\mathscr{N} \times \mathscr{E}\right) ; \phi(A) \subseteq A \text{ et } (e,a) \in A \right\}$$

qui n'est pas vide car il contient l'ensemble $\mathscr{N} \times \mathscr{E}$; ainsi $G = \bigcap\limits_{A \in \mathscr{J}} A$ est une partie de $\mathscr{N} \times \mathscr{E}$, non vide car elle contient (e,a), et est un élément de $\mathscr{J}$ car on a de l'inclusion $\phi\left(\bigcap\limits_{A \in \mathscr{J}} A\right) \subseteq \bigcap\limits_{A \in \mathscr{J}} \phi(A)$, de laquelle découle l'inclusion $\phi(G) \subseteq G$; il vient donc l'inclusion : $H = \{(e,a)\} \cup \phi(G) \subseteq G$. Cependant on a $\phi(e,a) \in \phi(G)$, de sorte que H appartient à $\mathscr{J}$ et donc contient G. Par suite :

$$G = \{(e,a)\} \cup \phi(G)$$

La première projection $p_{\mathscr{N}}(G)$ est égale à $\mathbb{N}$. Tout d'abord e appartient à $p_{\mathscr{N}}(G)$ car G contient (e,a). Soit n appartenant à $p_{\mathscr{N}}(G)$, ainsi existe x de $\mathscr{E}$ tel que (n,x) appartienne à G ; G qui est élément de $\mathscr{J}$, donc $(\sigma(n), \varphi(x))$ appartient à G ; de là $\sigma(n)$ appartient à $p_{\mathscr{N}}(G)$. En vertu de P_3 on obtient $p_{\mathscr{N}}(G) = \mathscr{N}$.

Pour tout n de $\mathscr{N}$ la tranche $G_n = \{x \in \mathscr{E} \ ; \ (n,x) \in G\}$ est un singleton. Désignons par E le sous-ensemble de $\mathscr{N}$ formé des éléments n tel que G_n soit un singleton. Tout d'abord démontrons que e appartient à E et pour cela considérons x tel que (e,x) soit dans $G = \{(e,a)\} \cup \phi(G)$; or (e,x) ne peut appartenir à $\phi(G)$ en vertu de P_2, donc $(e,x) = (e,a)$ et de là $x = a$; ainsi G_e est le singleton $\{a\}$. donné un élément n de E, considérons x' et x'' dans $G_{\sigma(n)}$; ainsi $(\sigma(n), x')$ appartient à $G = \{(e,a)\} \cup \phi(G)$, mais ne peut être égal à (e,a) car $\sigma(n) \neq 0$, donc appartient à $\phi(G)$. D'où l'existence de (p,b') dans G vérifiant l'égalité $(\sigma(n), x') = (\sigma(p), \varphi(b'))$, de sorte qu'en vertu de P_1 on a $n = p$, puis simultanément $(n,a') \in G$ *et* $x' = \varphi(b')$. Semblablement il existe b'' tel qu'on ait $(n,b'') \in G$ *et* $x'' = \varphi(b'')$, et comme n est un élément de E, à savoir G_n un singleton, on obtient $b' = b''$, puis $x' = \varphi(b') = \varphi(b'') = x''$. De là $\sigma(n)$ appartient à E, et précisément si $G_n = \{c\}$ alors $G_{\sigma(n)} = \{\varphi(c)\}$; en vertu de P_3 on obtient $E = \mathscr{N}$.

Par suite le sous-ensemble G de $\mathscr{N} \times \mathscr{E}$ est le graphe fonctionnel de l'application u définie par $\{u(n)\} = G_n$, qui donc satisfait l'égalité $u(0) = a$ car $G_e = \{a\}$; l'égalité $u(\sigma(n)) = \varphi(u(n))$ pour tout n de $\mathscr{N}$, est une interprétation du paragraphe précédent.

Unicité de l'application u. Considérons un couple (u', u'') d'applications de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{E}$ vérifiant les conditions voulues.

Le sous-ensemble $E = \{n \in \mathscr{N} \ ; \ u'(n) = u''(n)\}$ contient e par hypothèse ; les propriétés $u' \circ \sigma = \varphi \circ u'$ et $u'' \circ \sigma = \varphi \circ u''$ conduisent immédiatement à la stabilité de E par σ. D'où $E = \mathscr{N}$ en vertu de P_3, c'est-à-dire $u' = u''$. □

Corollaire 1.3.

Si $(\mathscr{N}, e, \sigma)$ et $(\mathscr{N}', e', \sigma')$ sont deux triplets possédant les propriétés P_1, P_2 et P_3, il existe alors une ***unique bijection*** $\mathscr{N} \xrightarrow{f} \mathscr{N}'$ *vérifiant les égalités $f(e) = e'$ et $f \circ \sigma = \sigma' \circ f$.*

Ces deux triplets sont isomorphes, en tant que triplets possédant les propriétés P_1, P_2 et P_3.

Démonstration. Pour obtenir une unique application $\mathscr{N} \xrightarrow{f} \mathscr{N}'$ vérifiant les égalités : $f(e) = e'$ et $f \circ \sigma = \sigma' \circ f$, on applique le théorème précédent au triplet

$$(\mathscr{E}, a, \varphi) = (\mathscr{N}', e', \sigma')$$

L'application f est bijective. D'après le théorème précédent, il existe une (unique) application $\mathscr{N}' \xrightarrow{g} \mathscr{N}$ vérifiant $g(e') = e$ et $g \circ \sigma' = \sigma \circ g$. On en tire que l'application

$\mathscr{N} \xrightarrow{g\circ f} \mathscr{N}$ vérifie les égalités $(g\circ f)(e) = e$ et $(g\circ f)\circ\sigma = \sigma\circ(g\circ f)$, de même que bien sûr l'application $id_{\mathscr{N}}$; ainsi, en vertu de l'unicité dans le théorème 1.2, on obtient $g\circ f = id_{\mathscr{N}}$. Et similairement $f\circ g = id_{\mathscr{N}'}$. □

Il est donc fondé d'étudier « **le** » ***triplet*** $\left(\mathbb{N}, 0, \sigma\right)$, les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ étant les **nombres entiers naturels**, ou **entiers naturels**, l'élément 0 étant appelé **zéro**.

Définition 1.4. Une **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **dans un ensemble non vide** $\mathscr{E}$ est une application $\mathbb{N} \xrightarrow{u} \mathscr{E}$. L'élément $u(n)$ est très souvent noté u_n, auquel cas on dit qu'il est le **terme général** de la suite.

Fait 1.5.

Le théorème 1.2 fonde la méthode de ***construction par récurrence d'une suite d'objets****. Précisément, les notations étant celle de ce théorème, sont* ***justifiées l'existence et l'unicité de la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***de*** $\mathscr{E}$***, définie par récurrence*** *selon les formules :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{\sigma(n)} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

1.2 L'addition des entiers naturels

Théorème 1.6.

Pour tout élément m de $\mathbb{N}$ *il existe une unique application injective* $\mathbb{N} \xrightarrow{\mathsf{A}_m} \mathbb{N}$ *vérifiant les deux égalités :*

$$\begin{cases} \mathsf{A}_m(0) = m \\ \mathsf{A}_m\circ\sigma = \sigma\circ\mathsf{A}_m \end{cases}$$

Ainsi est déterminée la loi de composition interne $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$ *définie par la relation* $m+n = \mathsf{A}_m(n)$*, appelée* ***addition*** *; l'entier naturel* $m+n$ *est la* ***somme*** *des entiers naturels m et n, qui en sont les* ***termes****.*

L'addition admet 0 *pour* ***élément neutre****, est* ***commutative****,* ***associative****, et tout entier naturel est* ***régulier****. On note* $1 = \sigma(0)$ *et on nomme cet entier naturel* ***un*** *; pour tout entier naturel n on a :* $\sigma(n) = n+1$.

Enfin, pour tout couple (m,n) *d'entiers naturels on a l'implication :*

$$\left(m+n=0\right) \Longrightarrow \left(m=0 \text{ et } n=0\right)$$

Démonstration. ***Existence et unicité de l'application*** A_m. compte-tenu du corollaire 1.3, on applique le théorème 1.2 au triplet :

$$\left(\mathscr{E}, a, \varphi\right) = \left(\mathbb{N}, m, \sigma\right)$$

Injectivité de l'application A_m, c'est à dire ***régularité de tout entier naturel*** m. Considérons le sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ formé des entiers naturels m tels que A_m soit injective. En vertu de l'unicité dans le théorème 1.2, on obtient $\mathsf{A}_0 = id_{\mathbb{N}}$; donc : $0 \in E$. Soit un élément m de E ; en vertu de cette unicité, on obtient l'égalité $\mathsf{A}_{\sigma(m)} = \sigma \circ \mathsf{A}_m$; en effet :

$$\begin{cases} \big(\sigma \circ \mathsf{A}_m\big)(0) = \sigma\big(\mathsf{A}_m(0)\big) = \sigma(m) \\ \\ \big(\sigma \circ \mathsf{A}_m\big) \circ \sigma = \sigma \circ \big(\mathsf{A}_m \circ \sigma\big) = \sigma \circ \big(\sigma \circ \mathsf{A}_m\big) \end{cases}$$

Comme σ est injective, ainsi que A_m parce que m appartient à E, l'application composée $\mathsf{A}_{\sigma(m)}$ est injective aussi, donc $\sigma(m)$ appartient à E. En conséquence de P_3 on obtient l'égalité $E = \mathbb{N}$.

L'addition est définie par la formule : $m + n = \mathsf{A}_m(n)$. Comme attendu on note $1 = \sigma(0)$. *Pour tout entier naturel m on a les deux égalités* :

$$m + 0 = m \quad ; \quad m + 1 = \sigma(m)$$

En effet : $m + 0 = \mathsf{A}_m(0)$, et : $m + 1 = \mathsf{A}_m\big(\sigma(0)\big) = \sigma\big(\mathsf{A}_m(0)\big) = \sigma(m)$.

Commutativité de l'addition. *Pour tout couple* (m,n) *d'entiers naturels on a* :

$$m + n = n + m$$

En effet, si m appartient à $\mathbb{N}$, considérons le sous-ensemble E_m de $\mathbb{N}$ formé des entiers naturels n tel qu'on ait $\mathsf{A}_m(n) = \mathsf{A}_n(m)$. Par construction de A_m on a $\mathsf{A}_m(0) = m$, et on a observé : $\mathsf{A}_0 = id_{\mathbb{N}}$; donc : $0 \in E_m$. Soit n appartenant à E_m ; de même on a remarqué plus haut : $\mathsf{A}_{\sigma(n)} = \sigma \circ \mathsf{A}_n$, donc :

$$\mathsf{A}_{\sigma(n)}(m) = \sigma\big(\mathsf{A}_n(m)\big) = \sigma\big(\mathsf{A}_m(n)\big) = \mathsf{A}_m\big(\sigma(n)\big)$$

c'est-à-dire $\sigma(n)$ appartient à E_m. En conséquence de P_3 on obtient $E_m = \mathbb{N}$.

L'entier naturel 0 ***est élément neutre de l'addition***. C'est une conséquence de la définition et de la commutativité de l'addition.

Composition des applications A_m. *Pour tout couple* (m,n) *d'entiers naturels on a les égalités* :

$$\mathsf{A}_m \circ \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_n \circ \mathsf{A}_m = \mathsf{A}_{m+n}$$

En effet, l'application composée $\mathsf{A}_m \circ \mathsf{A}_n$ vérifie immédiatement les deux égalités :

$$\begin{cases} \big(\mathsf{A}_m \circ \mathsf{A}_n\big)(0) = m + n \\ \\ \big(\mathsf{A}_m \circ \mathsf{A}_n\big) \circ \sigma = \sigma \circ \big(\mathsf{A}_m \circ \mathsf{A}_n\big) \end{cases}$$

En vertu de l'unicité dans le théorème 1.2, elle est égale à l'application A_{m+n}.

Associativité de l'addition. *Pour tout triplet* (m,n,p) *d'entiers naturels on a* :

$$m + (n + p) = (m + n) + p$$

En effet, compte-tenu de la loi de composition des applications A_m et de la commutativité de l'addition, on peut écrire :

$$m+(n+p)=m+(p+n)=\mathsf{A}_m\big(\mathsf{A}_p(n)\big)=\mathsf{A}_p\big(\mathsf{A}_m(n)\big)=p+(m+n)=(m+n)+p$$

Enfin, soit un couple (m,n) d'entiers naturels vérifiant $m+n=0$. Si on avait $m\neq 0$, alors m appartiendrait à $\sigma(\mathbb{N})$ en vertu de P_2 ; c'est-à-dire, il existerait x appartenant à $\mathbb{N}$ tel qu'on ait $m=\sigma(x)=x+1$; mais alors on aurait :

$$0=m+n=(x+1)+n=(x+n)+1$$

Ainsi on obtiendrait : $0=\sigma(x+n)$, ce qui est contradictoire. On a donc $m=0$; en conséquence on a aussi $n=0$, puisque l'addition est commutative. □

Fait 1.7.

Reprenant les conditions du fait 1.5, le théorème 1.2 justifie donc l'existence et l'unicité de **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***de*** $\mathscr{E}$ ***définie par récurrence*** *selon les formules, qu'on réécrit dorénavant :*

$$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=\varphi(u_n) \end{cases}$$

Corollaire 1.8.

Étant donné un ensemble non vide E et une application $E\xrightarrow{f}E$, il existe une unique suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de E dans lui-même ayant les propriétés :

$$\begin{cases} f_0=id_E \\ f_{n+1}=f\circ f_n \\ f_p\circ f_q=f_{p+q} \end{cases}$$

L'application f_n est, ***par définition****, la* **n**[ième] **itérée** *de l'application $E\xrightarrow{f}E$. De manière intuitive f_n « est » $\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{n}$, et est souvent notée $f^{\circ n}$.*

Démonstration. On considère le triplet $\big(\mathscr{E},a,\varphi\big)$ où $\mathscr{E}=E^E$ est l'ensemble des applications de E dans lui-même, $a=id_E$ et $\varphi(g)=f\circ g$. Le théorème 1.2 et le fait 1.7 permettent d'affirmer l'existence et l'unicité de la suite u vérifiant $u_{n+1}=f\circ u_n$, dont le terme général est noté dans ce cas f_n. Ensuite, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels on a l'égalité :

$$f_p\circ f_q=f_{p+q}$$

En effet, on considère le sous-ensemble $F_q=\big\{p\in\mathbb{N}\,;\,f_p\circ f_q=f_{p+q}\big\}$, pour tout entier naturel q. Il contient 0, et est stable par σ, grâce notamment à la commutativité et l'associativité de l'addition. ainsi, en vertu de P_3 on obtient l'égalité $F_q=\mathbb{N}$. . □

Remarque 1.9.

1. Reprenant le contexte du fait 1.7, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels on a l'égalité :

$$u_{n+p} = \varphi^{\circ p}(u_n)$$

En effet, on considère le sous-ensemble $E_n = \{p \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+p} = \varphi^{\circ p}(u_n)\}$, pour tout entier naturel n. Il contient 0, et est stable par σ, grâce notamment à l'associativité de l'addition. ainsi, en vertu de P_3 on obtient l'égalité $E_n = \mathbb{N}$.

2. *Pour tout entier naturel on* a *l'égalité* $\sigma^{\circ n} = \mathsf{A}_n$. C'est une conséquence du corollaire 1.8, en considérant l'ensemble des entiers naturels pour lesquels on a la propriété : il contient 0 car $\mathsf{A}_0 = id_{\mathbb{N}}$ et est stable par σ car $\mathsf{A}_{\sigma(n)} = \sigma \circ \mathsf{A}_n$.

À cet égard, introduisons une définition commode pour exprimer la proposition 1.10 qui suit et le théorème 1.14 plus loin. Un élément du sous-ensemble

$$S_n = \{\sigma^{\circ p}(n) \ ; \ p \in \mathbb{N}\}$$

est appelé **suivant** de n ; chacun pourra vérifier que le sous-ensemble S_n des suivants de l'entier naturel n est égal à :

$$\{n + x \ ; \ x \in \mathbb{N}\}$$

On observe les égalités : $S_0 = \mathbb{N}$ et $S_1 = \mathbb{N}^*$; la première parce que 0 est élément neutre de l'addition, la seconde parce que $\sigma(\mathbb{N})$ est le sous-ensemble $\{p+1 \ ; \ p \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 1.10.

Pour tout couple d'entiers naturels (m,n), il existe un unique entier naturel x tel qu'on ait $m = n + x$ ***ou*** *il existe un unique entier naturel y appartenant à $\mathbb{N}$ tel qu'on ait $n = m + y$.*

Ainsi m ***est un suivant de*** *n* ***ou*** *n* ***est un suivant de*** *m.*

Démonstration. Considérons le sous-ensemble

$$E_m = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n \in S_m \ ou \ m \in S_n\}$$

Il contient 0 car m appartient à S_0. Soit n appartenant à E_m ; dans le cas où n est un suivant de m, l'entier naturel $n+1$ en est un aussi ; dans le cas où m est un suivant de n, soit $m = n$, et alors $n+1 = m+1$, ainsi $n+1$ est un suivant de m ; soit il existe x, $x \in \mathbb{N}$, tel qu'on ait $m = n + \sigma(x)$, et alors on a les égalités $m = n + (x+1) = (n+1) + x$, ainsi m est un suivant de $n+1$. En tout état de cause, $n+1$ appartient à E_m ; d'où : $E_m = \mathbb{N}$.

L'unicité de x si m appartient à S_n, ou celle de y si n appartient à S_m est immédiate car tout entier naturel est régulier pour l'addition. □

Définition 1.11. Étant donné un couple (m,n) d'entiers naturels, si m est un suivant de n l'unique entier naturel d vérifiant $m = n + d$ s'appelle la **différence de** m **et de** n, et se note $m - n$. Lorsque m appartient à $\mathbb{N}^* = S_1$, on peut considérer la différence $m - 1$, appelé aussi l'*antecesseur* de m.