Chapitre 1.

LES SUITES NUMÉRIQUES

Cours

I. Rappels de cours

1. Raisonnement par récurrence

On envisage de démontrer une propriété que l'on note P_n pour $n \in \mathbb{N}$. La première étape est de vérifier si P_0 est vraie (initialisation) ; la deuxième étape est de supposer P_n vraie et de démontrer que P_{n+1} est vraie (hérédité).

2. Comportement global d'une suite numérique

Soit (u_n) une suite numérique et $(M,m) \in \mathbb{R}^2$.

- (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$). (u_n) est monotone lorsqu'elle croissante ou décroissante.
- (u_n) est majorée par M (respectivement minorée par m) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$). (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

3. Limites de suites

Soit $(u_n),(v_n)$ deux suites numériques et $(l,l') \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que (u_n) admet pour limite l (ou converge vers l) lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
- On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;A[$) contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$). On dit qu'une telle suite diverge.

Cours

Opérations sur les limites

- La somme $(u_n + v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$

- Le produit $(u_n v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l, l' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	ll'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	Forme indéterminée	Forme indéterminée
$+\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l, l' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l, l' \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	Forme indéterminée	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Cours

4. Propriétés

▶ ***Théorèmes de comparaison***

Soit $(u_n),(v_n)$ et (w_n) trois suites numériques. Soit $l \in \mathbb{R}$.

Hypothèse 1 : une inégalité, monotonie	**Hypothèse 2 : limites**	**Conclusion**
$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$
(u_n) est croissante	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	$u_n \leq l$
(u_n) est décroissante	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	$u_n \geq l$

▶ ***Théorèmes de convergence monotone***

- Toute suite croissante majorée (respectivement non majorée) converge (respectivement diverge vers $+\infty$).
- Toute suite décroissante minorée (respectivement non minorée) converge (respectivement diverge vers $-\infty$).

▶ ***Comportement de la suite (q^n) où $q \in \mathbb{R}$.***

- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q < -1$, alors (q^n) n'admet pas de limite, finie ou infinie.

5. Formulaire sur les suites

▶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

▶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$, pour $q \neq 1$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^P = +\infty$.

Exercices

II. Pour s'échauffer : vrai ou faux ?

Pour chaque question, indiquer si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

2.1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement négatifs.

- ❑ **a.** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.
- ❑ **b.** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- ❑ **c.** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
- ❑ **d.** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$ et si (u_n) est décroissante alors $u_n \geq -4$.

2.2 *Librement inspiré du BAC 2005, Métropole*

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.

- ❑ **a.** Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
- ❑ **b.** Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
- ❑ **c.** Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
- ❑ **d.** Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

Exercices

2.3 *Librement inspiré du BAC 2006, Inde*

On considère deux suites (u_n) et (v_n).

- ❑ **a.** Si la suite (v_n) ne s'annule pas et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, alors $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang.
- ❑ **b.** Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n v_n)$ ne converge pas.
- ❑ **c.** Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
- ❑ **d.** Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

2.4 *Difficile – librement inspiré du BAC 2008, Antilles*

Soit (x_n) une suite de nombres réels. On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

- ❑ **a.** Si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
- ❑ **b.** Les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

2.5 On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}$.

- ❑ **a.** Pour tout entier $n > 0$, on a : $S_n = \dfrac{n+1}{2n}$.
- ❑ **b.** Pour tout entier $n > 0$, on a : $0 \le S_n \le \dfrac{1}{2}$.
- ❑ **c.** On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.
- ❑ **d.** La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2.6 On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) u_n \end{cases}$.

- ❑ **a.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.
- ❑ **b.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- ❑ **c.** Quel que soit $n\in\mathbb{N}^*$, si on a $n \ge 2$, alors on aura : $0 \le u_n \le 2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.
- ❑ **d.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

2.7 *D'après concours FESIC 2015 – suite et trigonométrie*

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

- ❑ **a.** Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+8} > u_n$.
- ❑ **b.** Pour tout entier naturel n, on a : $-3 \leq u_n \leq 3$.
- ❑ **c.** La suite (u_n) est monotone.
- ❑ **d.** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

2.8 *Utilisation d'une suite dans un algorithme – d'après concours FESIC 2013*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1$.

On donne l'algorithme suivant :

VARIABLES

n EST UN ENTIER NATUREL

DEBUT ALGORITHME

i PREND LA VALEUR 0

u PREND LA VALEUR 1

DEBUT TANT QUE

TANT QUE $i < n$

u PREND LA VALEUR $\frac{1}{2}(u - i) - 1$

i PREND LA VALEUR $i + 1$

FIN TANT QUE

AFFICHER u

FIN ALGORITHME

- ❑ **a.** Pour $n = 3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	$-\frac{1}{2}$	1
3	$-\frac{7}{4}$	2
3	$-\frac{23}{4}$	3

- ❑ **b.** Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.

Exercices

On considère (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

- ❑ **c.** La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^er^ terme $v_0 = 1$.
- ❑ **d.** Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} + n$.

III. Des QCM. À vous de choisir !

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

3.1 Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

- ❑ **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- ❑ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- ❑ **c.** (u_n) n'admet pas de limite.
- ❑ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3.2 *Classique*

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

- ❑ **a.** (u_n) converge vers 0.
- ❑ **b.** La suite (v_n) est croissante.
- ❑ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
- ❑ **d.** $u_n \leq v_n$.

Remarque

Ces deux suites sont utilisées pour encadrer le nombre e ($e = \exp(1)$).