Chapitre 1

Suites numériques

Problématique

- Modélisations de phénomènes discrets et approximations de nombres.

…M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels.

C.G.J Jacobi (1804-1851)

Points incontournables

- Raisonnement par récurrence, comportement d'une suite numérique, opérations et propriétés sur les limites de suites.

1 L'ESSENTIEL

Raisonnement par récurrence

On envisage de démontrer une propriété que l'on note P_n pour $n \in \mathbb{N}$. La 1re étape est de vérifier si P_0 est vraie (initialisation) ; la 2e étape est de supposer P_n vraie et de démontrer que P_{n+1} est vraie (hérédité).

Exemple Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Démontrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2\left(2^n + 1\right) - 1 = 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

À retenir

Le raisonnement par récurrence est aussi appelé « axiome » qui est une propriété admise au départ d'une théorie (non démontrée). Les axiomes sont le fondement d'une théorie. On parle des « axiomes d'Euclide » en géométrie. Les théorèmes et propriétés sont des résultats déduits des axiomes.

Comportement global d'une suite numérique

Soit (u_n) une suite numérique et $(M, m) \in \mathbb{R}^2$.

(i) (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$). (u_n) est monotone lorsqu'elle croissante ou décroissante.

(ii) (u_n) est majorée par M (respectivement minorée par m) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$). (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples 1) Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

On a :

$$u_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

La suite (u_n) est donc majorée par 2.

2) Soit (v_n) une suite croissante alors on a $v_n \geq v_0$. La suite (v_n) est donc minorée par v_0.

Limites de suites

Soit (u_n) (v_n) deux suites numériques et $(l,l') \in \mathbb{R}^2$.

(i) On dit que (u_n) admet pour limite l (ou converge vers l) lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

(ii) On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;A[$) contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang. On note :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$). On dit qu'une telle suite diverge.

Opérations sur les limites

Dans la suite, FI veut dire Forme Indéterminée.

La somme $(u_n + v_n)$

$\lim v_n$ \ $\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Exemple Soit $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n} + 2$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$. Donc on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 2$.

Le produit $(u_n v_n)$

$\lim v_n$ \ $\lim u_n$	$l, l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	ll'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Exemple Soit $W_n = n^3 - n^2$. On ne peut pas appliquer le tableau concernant la somme de deux suites (sinon on se retrouve avec une forme indéterminée). On réécrit W_n de cette façon :

$$w_n = n^2(n-1) = u_n v_n \text{ où } u_n = n^2 \to +\infty \text{ et } v_n = n - 1 \to +\infty .$$

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

À retenir

Les formes indéterminées à retenir sont les suivantes :

« $+\infty - \infty$;

$\pm\infty \times 0 ; \frac{0}{0} ; \pm\frac{\infty}{\infty}$ ».

Elles sont au nombre de 4 et à connaître puisque vous pourrez être amenés à en rencontrer dans certains exercices.

Le quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

lim v_n lim u_n	$l, l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	FI	FI

Exemple Soit $w_n = \frac{-2}{n-1}$. On a $u_n = -2$ et $v_n = n-1 \to +\infty$. On conclut que : $w_n \to 0$

Propriétés

Théorèmes de comparaison

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques. Soit $l \in \mathbb{R}$.

Hypothèse 1 : une inégalité, monotonie	**Hypothèse 2 : limites**	**Conclusion**
$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
$u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$
(u_n) est croissante	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$	$u_n \leq l$
(u_n) est décroissante	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$	$u_n \geq l$

À retenir

Le théorème placé à la 3e ligne du tableau est communément appelé « théorème des gendarmes ».

Exemples 1) Soit $u_n = n^3 - (-1)^n$.

On a $u_n \geq n^3 - 1$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 - 1 = +\infty$. D'après le théorème de comparaison situé à la 1re ligne, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit $t_n = \frac{\cos(n^3)}{n}$. On a l'encadrement suivant :

$-\frac{1}{n} \leq t_n \leq \frac{1}{n}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(n^3) \leq 1$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$.

On conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.

Théorèmes de convergence monotone

(i) Toute suite croissante majorée (respectivement non majorée) converge (respectivement diverge vers $+\infty$).

(ii) Toute suite décroissante minorée (respectivement non minorée) converge (respectivement diverge vers $-\infty$).

(iii) Si une suite est croissante (respectivement décroissante) et converge vers un réel l alors elle est majorée (respectivement minorée) par l.

Exemples 1) Soit $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$. On a vu (plus haut) que (u_n) était majorée par 2. De plus, on a :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \cdot$$

(u_n) est donc croissante. On conclut qu'elle converge.

2) Soit $h_n = \frac{1}{n}+1$. On a $h_n > 1$.

Et par ailleurs, $h_{n+1}-h_n = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$. D'où, (h_n) est décroissante.

On conclut que (h_n) converge.

Comportement de la suite (q^n) où $q \in \mathbb{R}$.

(i) Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(ii) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(iii) Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'admet pas de limite, finie ou infinie.

Exemples 1) Soit $u_n = 2^n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $q = 2 > 1$.

2) Soit $v_n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $|q| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$.

À retenir

Si q = 1, la suite (q^n) est constante égale à 1 (donc convergente). Et, pour q = –1, c'est ce qu'on appelle une suite « alternée » puisque suivant la parité de n, elle prend périodiquement les valeurs 1 et –1.

Formulaire sur les suites

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ pour $q \neq 1$. (i i i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

(iv) $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$. (v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

(vi) $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

1 L'ESSENTIEL

Je me teste !

Dire si les énoncés sont vrais ou faux

- Soit (u_n) et (v_n)deux suites.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = -\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -4$ et si (u_n) est décroissante alors $u_n \geq -4$.
- On considère deux suites (u_n) et (v_n). Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ convergent.

Dernière minute

Bien insister sur les théorèmes de comparaison et de convergence monotone. Ne pas oublier ce qu'est une suite géométrique et arithmétique.

Je lis, je consulte, je surfe

- Pour s'entraîner sur des exercices de sujets de Bac rangés par thème : Bruno CIOLFI, *Les exos du Bac*, Paris, Ellipses, 2013.
- Des exercices et activités qui sortent de l'ordinaire pour ceux qui veulent aller plus loin : Fréderic LAROCHE, *Activité Maths Term S*, Paris, Ellipses, 2012.
- Le site internet associé au livre précédent où vous trouverez des fiches de cours et certains exercices corrigés :
  ↪ http ://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS/cahier_activites/site/activites_maths_TS.htm
- Pour ceux qui veulent en savoir plus sur la modélisation de phénomènes biologiques par les suites et autres : Nicolas BACAER, *Histoire de mathématiques et de populations*, Paris, Cassini, 2008

Je prends des notes

1 SAVOIR-FAIRE ET COMPÉTENCES

Savoir mener un raisonnement par récurrence

L'objectif est de montrer qu'à partir d'un rang n_o, une proposition (ou propriété) que l'on appelle généralement $P(n)$ est vraie.

On procède en trois étapes :

on vérifie que $P(n_o)$ est vraie, c'est l'initialisation ;

on suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq n_o$ et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est l'hérédité ;

on conclut que pour tout $n \geq n_o$, $P(n)$ est vraie.

Il est à noter qu'il faut bien respecter les trois étapes du raisonnement, ainsi que sa rédaction, sous peine de rater sa récurrence.

Ce principe, considéré ici comme un axiome, équivaut à la propriété suivante de $\mathbb{N}$:

L'ensemble $\mathbb{N}$ est la seule partie A de $\mathbb{N}$ vérifiant :

(i) $0 \in A$,

(ii) pour tout entier naturel n, si $n \in A$, alors $n+1 \in A$

Le conseil du prof

Le raisonnement par récurrence convient particulièrement pour démontrer des propriétés de suites définies par récurrence, mais pas seulement. D'une façon générale, le recours à ce principe de raisonnement est le dernier réflexe à avoir lorsque l'on n'a pas réussi à démontrer la propriété voulue par des moyens algébriques basiques.

Ça peut tomber !

Voici quelques exemples où le raisonnement par récurrence s'emploie tout naturellement pour démontrer ces propriétés « classiques » :

- $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Penser, à un moment, à factoriser.

- L'inégalité de Bernoulli :

Pour tout nombre réel $x>0$ *, on a :* $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Attention au calcul de puissances !