Chapitre I Logique combinatoire

La logique combinatoire est une technique dédiée à la représentation de diverses fonctions. Elle permet de synthétiser des systèmes comportant des états finis.

Les circuits logiques fonctionnent avec deux signaux, le 1 logique et le 0 logique .Dans le cas général, les circuits électriques travaillent avec des signaux qui représentent des variables continues. Dans la pratique, les variables peuvent prendre plusieurs formes (continue, discrète, binaire, logique…).

Définitions

Variable continue : c'est une grandeur qui peut prendre des valeurs continues. Exemple : un nombre réel x appartenant à l'intervalle [-5, 5].

Variable discrète : c'est une grandeur qui peut prendre des valeurs prédéfinies et discontinues. Exemple : $f(x)$, la partie entière de x appartenant à l'intervalle [0, 100].

Variable binaire : c'est une variable discrète qui ne peut prendre que deux et seulement deux valeurs. Exemple : 0 et 1.

Variable logique : c'est une variable binaire qui ne peut prendre que deux et seulement deux valeurs : VRAI ou FAUX. On note que la valeur VRAI correspond au 1 logique et que FAUX est synonyme du 0 logique.

Aujourd'hui, la plupart des systèmes automatisés et électroniques utilisent des circuits logiques d'où l'intérêt de cette branche.

Illustration d'une variable logique

On considère l'exemple simple du fonctionnement d'une lampe. Le 1 logique est équivalent à dire LAMPE ALLUMEE et un 0 logique signifie LAMPE ETEINTE. On a donc deux états possibles : 0 ou 1. Conformément au schéma (Cf. Figure 1) la variable logique y représente l'état de la lampe.

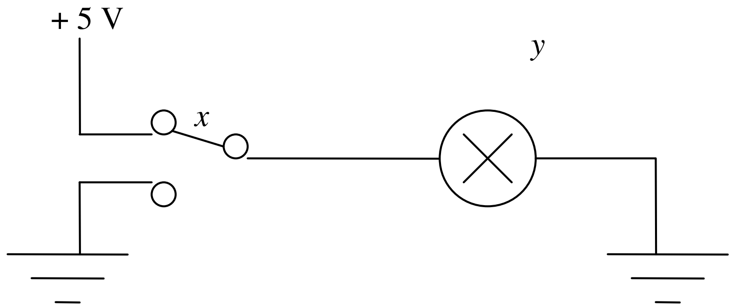


Figure 1 Illustration physique d'une variable logique

Cet état dépend de la variable x qui correspond à l'état de l'interrupteur (0 si ouvert et 1 si fermé). La lampe est soit branchée à la masse (0 volts) ou à la source de 5 volts.

D'une manière générale, le 0 logique correspond à 0 Volt et le 1 logique correspond à 5 Volt.

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7

CQFS 1 Opérateur logique ET

Définition

L’opérateur logique ET est un opérateur à deux entrées. Pour l’illustrer, on considère l’exemple d’une lampe et on prend le cas où on dispose de deux interrupteurs a et b en série. Le schéma (Cf. Figure 2) présente le dispositif en question.

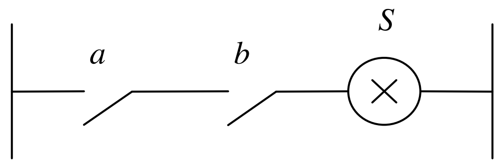


Figure 2 Illustration électrique

Dans cet exemple, la lampe s’allume quand l’interrupteur a est fermé ET quand l’interrupteur b est fermé. Sans l’une de ces deux conditions, la lampe ne peut pas s’allumer :

$$a \text{ ET } b = \text{LAMPE ALLUMEE} = S$$

Cette fonction donne une sortie S à l’état haut (1 logique) quand les deux entrées le sont aussi. D’un point de vue formel, l’opérateur ET est noté par le symbole (.). On obtient donc :

$$a.b = \text{LAMPE ALLUMEE}$$

Ou plus simplement encore,

$$a.b = S$$

Avec S la sortie qui représente l’état de la lampe.

Table de vérité

Dans cet exemple, on a deux entrées a et b, ce qui représente quatre combinaisons différentes que l'on résume dans la table ci-contre.

Cette table (voir Tableau 1) montre toutes les combinaisons possibles des entrées a et b tout en donnant l’état correspondant de la sortie. Elle est nommée "table de vérité".

Tableau 1 Table de vérité

b	a	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schéma conventionnel

Le circuit, que l'on vient de voir, existe sous forme de composant électronique appelé "porte logique" du type ET.

Cette porte logique est représentée par un schéma conventionnel ou symbole défini dans des normes internationales. Le schéma conventionnel de la porte ET est donné dans le schéma (Cf. Figure 3).

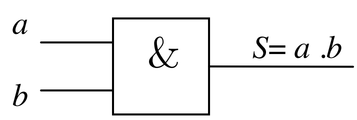


Figure 3 Schéma d’une porte ET

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7

CQFS 2 Opérateur logique OU

Définition

L'opérateur logique OU est un opérateur à deux entrées et une sortie.

Pour illustrer son fonctionnement, on considère l'exemple d'une lampe et on prend le cas où on dispose de deux interrupteurs *a* et *b* en parallèle. Le schéma (Cf. Figure 4) présente le dispositif en question.

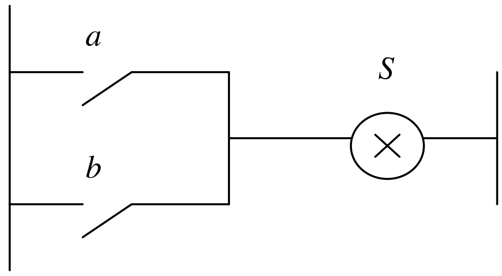


Figure 4 Illustration électrique de la fonction OU

Dans cet exemple, la lampe s'allume quand le contact *a* est fermé OU quand l'interrupteur *b* est fermé. Si aucune de ces deux conditions n'est remplie, la lampe ne peut s'allumer :

$$a \text{ OU } b = \text{LAMPE ALLUMEE} = S$$

Cette fonction donne une sortie *S* à l'état haut (1 logique) quand l'une de deux entrées l'est aussi. D'un point de vue formel, l'opérateur OU est noté par le symbole (+). On obtient donc :

$$a + b = \text{LAMPE ALLUMEE}$$

Ou plus simplement encore : $a + b = S$

Avec *S*, la sortie qui représente l'état de la lampe.

Table de vérité

Dans cet exemple, on a deux entrées *a* et *b*, ce qui représente quatre combinaisons différentes résumées dans la table de vérité suivante (Cf. Tableau 2).

Tableau 2 Opérateur OU : table de vérité

b	*a*	*S*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Schéma conventionnel

La porte logique OU est représentée par le schéma conventionnel donné dans le schéma ci-contre (Cf. Figure 5).

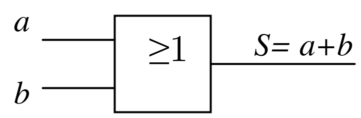


Figure 5 Porte logique OU

La fonction *OU* peut être aussi assurée par une cellule pneumatique (Cf. Figure 6). Lorsque a=1, la pression entre dans l'orifice *a*, le clapet se déplace vers la droite et obstrue l'entrée *b*. Lorsque les deux entrées *a* et *b* sont à l'état 1, le clapet se positionne à droite ou à gauche en fonction de la pression la plus forte.

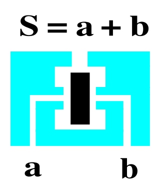


Figure 6 Cellule OU

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7

CQFS 3 Opérateur logique NON

Définition

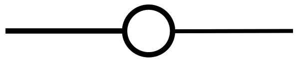
Inverseur est la porte à une entrée et à une sortie, qui donne la valeur complémentaire de son signal d'entrée. Si l'entrée est vraie, la sortie se retrouve à l'état bas et vice versa.

La table de vérité d'un inverseur est donnée ci-contre (*A* étant l'entrée et *S* représente la sortie).

A	*S*
0	1
1	0

Schéma et notation

Le schéma conventionnel d'un inverseur est donné dans le schéma ci-contre.



D'un point de vue formel, on représente l'inversion de la variable *a* par l'expression *a barre* représentée par $\overline{a}$. Cette barre indique un état logique inversé.

Conséquences : NON-ET et NON-OU

La porte NON-ET est une porte ET suivie d'un inverseur à la sortie. Il s'ensuit que la sortie est inversée par rapport à une porte ET.

Dans ce cas, la table de vérité est la complémentaire de celle d'une porte ET. La table de vérité de cette porte est donnée dans le tableau ci-contre.

b	*a*	NON-ET	ET
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

D'une manière analogue, on peut définir la porte NON-OU décrite par la table de vérité suivante.

b	*a*	NON-OU	OU
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Les portes NON-OU et NON-ET sont représentées par les schémas ci-dessous (Cf. Figure 7, Cf. Figure 8).

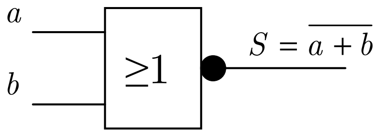


Figure 7 NON-OU

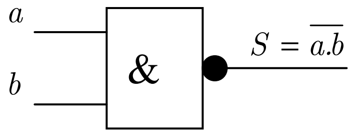


Figure 8 NON-ET

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7

CQFS 4 Opérateur logique OU EXCLUSIF

Définition

L'opérateur OU EXCLUSIF est une porte à deux entrées et à une sortie. Cet opérateur génère un état haut si une seule entrée est à l'état haut. Si les deux entrées sont toutes les deux à l'état haut ou toutes les deux à l'état bas, la sortie obtenue correspond à l'état bas. La table de vérité d'un OU EXCLUSIF est donnée ci-contre (*a* et *b* étant les entrées et *S* représente la sortie).

b	a	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Schéma conventionnel

Le schéma conventionnel d'un inverseur est donné dans le schéma (Cf. Figure 9)

D'un point de vue formel, un OU EXLUSIF est exprimé par le symbole suivant : $\oplus$

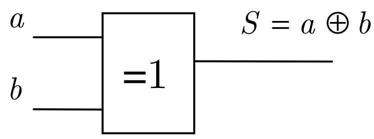


Figure 9 Porte ou exclusif

Ainsi, on a :

$$S = a \oplus b\,.$$

Applications

Question 1 : Soient *a* et *b* deux variables logiques. Montrer la relation suivante : $a \oplus b = a.\bar{b} + b.\bar{a}$.

Réponse : On détermine la table de vérité de $a.\bar{b}$ et celle de $b.\bar{a}$. Ensuite, on compare $a \oplus b$ et $a.\bar{b} + b.\bar{a}$ (voir le tableau suivant).

a	b	$a.\bar{b}$	$b.\bar{a}$	$a.\bar{b} + b.\bar{a}$	$a \oplus b$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Question 2 : Montrer qu'un OU EXCLUSIF inversé permet de comparer deux variables logiques *a* et *b*. C'est-à-dire, si *a* =*b*, alors la sortie *S* de cet opérateur se met à l'état haut et autrement elle est à l'état bas.

Réponse : On considère la table de vérité d'un OU EXCLUSIF et on inverse toutes les valeurs (voir la table de vérité ci-contre). On remarque que $\overline{a \oplus b} = 1$ si et seulement si *a*=*b*.

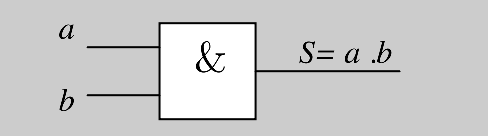
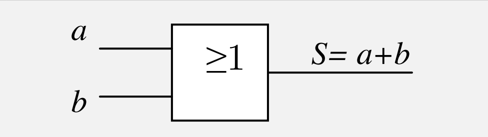
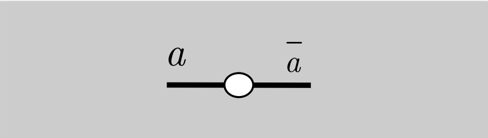
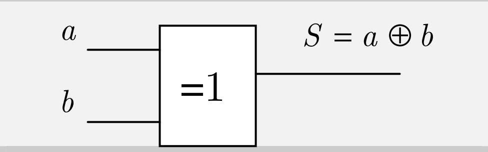
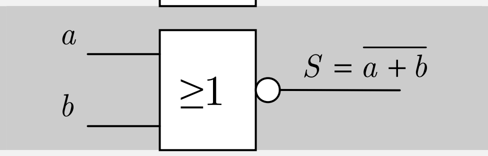
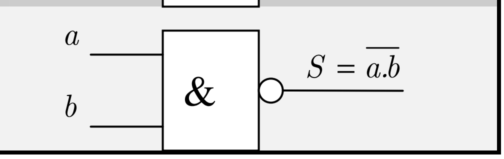
a	b	$a \oplus b$	$\overline{a \oplus b}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7

CQFS 5 Opérateurs logiques et schémas conventionnels

Chaque opérateur logique peut être représenté par son schéma conventionnel. Les différentes représentations sont données dans la table suivante (voir Tableau 3).

Tableau 3 Opérateurs logiques et schémas conventionnels

Opérateur	Schéma conventionnel
ET AND	 $S = a.b$
OU OR	 $S = a+b$
NON	 $\bar{a}$
OU exclusif OR	 $S = a \oplus b$
NON-OU NOR	 $S = \overline{a+b}$
NON-ET NAND	 $S = \overline{a.b}$

Applications

A partir des portes logiques élémentaires, on peut réaliser des montages complexes à plusieurs entrées et à plusieurs sorties. Dans la logique combinatoire, une sortie représente une fonction à plusieurs entrées.

Exemple : on considère la sortie S du montage dans le schéma (Cf. Figure 10). S peut être simplement exprimée par la fonction combinatoire suivante :

$$S(A,B,C) = C.\overline{\left(A + B + \overline{A.C}\right)}$$

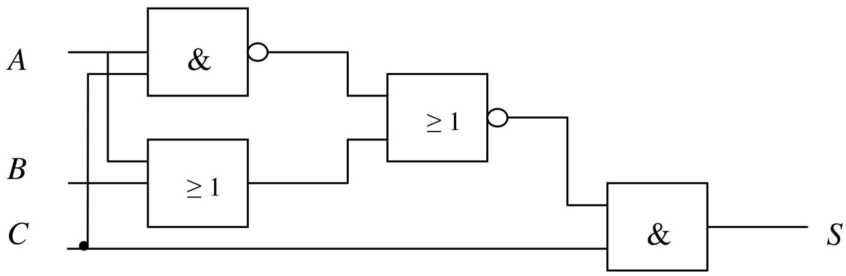


Figure 10 Exemple d'un circuit combinatoire

CQFS 6 Fonctions logiques

Définition

Une fonction logique admet plusieurs variables logiques d'entrée. Elle représente une combinaison de termes obtenus à partir de ces variables et de différents opérateurs de base (ET, OU, NON).

Exemple : $f(a,b,c) = ab + \overline{ac}$ est une fonction logique à trois variables.

Formes simplifiée et canonique

Un circuit combinatoire peut être entièrement défini à l'aide de fonctions. Suivant la complexité du système combinatoire, on peut être amené à chercher des simplifications au niveau de ses fonctions. Avoir une forme simplifiée est très important afin de réduire le coût de la réalisation de telles fonctions. Contrairement à la forme simplifiée, la forme canonique d'une fonction est celle qu'on obtient à partir de sa table de vérité. A titre d'exemple, l'opérateur OU exclusif peut s'écrire sous la forme canonique suivante : $f(a,b) = a \oplus b = a.\bar{b} + \bar{a}.b$. En d'autres termes, la forme canonique d'une fonction est l'expression dont tous les termes font apparaître toutes les variables de la fonction.

Application

Question 1 : Soit *F* la fonction suivante : $F(a,b,c) = a \oplus (b.c)$. Donner le schéma de cette fonction et déterminer sa forme canonique.

Réponse : D'après la formule, on peut facilement remarquer le besoin d'une porte *ET* et d'une porte OU EXCLUSIF pour construire cette fonction. Voir le schéma (Cf. Figure 11).

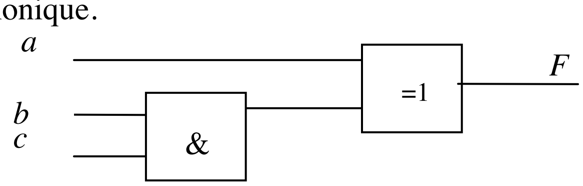


Figure 11 le schéma de la fonction F

Pour retrouver la forme canonique, on détermine d'abord la table de vérité de la fonction (voir la table ci-contre). A partir des états hauts de la fonction donnés dans la table, on peut établir la forme canonique :

$$F(a,b,c) = \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c}$$

a	*b*	*c*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Question 2 : Soit *F* une fonction logique, à trois variables, définie comme suit : $F(a,b,c) = a \oplus (b \oplus c)$. Montrer que sa forme canonique est donnée par l'équation suivante : $F(a,b,c) = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + abc$

Réponse : Il suffit d'adopter la même démarche suivie pour répondre à la question précédente (établir la table de vérité et considérer les états hauts de la fonction à partir de la table trouvée).

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7

CQFS 7 Règles de simplification

Soient x, y et z des variables logiques quelconques. Les relations suivantes sont toujours vérifiées :

Commutativité

- $x + y = y + x$
- $x.y = y.x$

Associativité

- $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$
- $x.(y.z) = (x.y).z = x.y.z$

Distributivité

- $x.(y + z) = (x.y) + (x.z) = x.y + x.z$

Idempotence

- $x + x = x$
- $x.x = x$

Absorption

- $x + 1 = 1$
- $x.0 = 0$

Eléments neutres

- $x + 0 = x$
- $x + 1 = 1$
- $x + \overline{x} = 1$
- $x.\overline{x} = 0$

Complémentarité

- $x + \overline{x} = 1$
- $x.\overline{x} = 0$
- $\overline{\overline{x}} = x$

Règles de Morgan

- $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$
- $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

Application

Question : Simplifier la fonction suivante : $f(a,b,c) = a\left(b\overline{c} + \overline{ab}\right)$.
Réponse : $f(a,b,c) = a\left(b\overline{c} + \overline{a} + \overline{b}\right) = a\left(b\overline{c} + \overline{b}\right) = a\left(b\overline{c} + \overline{b}c + \overline{b}\,\overline{c}\right) = a\left(b\overline{c} + \overline{b}c + \overline{b}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}\right) = a\left(\overline{b} + \overline{c}\right)$.

A cette fiche, on peut associer les applications APPLI. 1 à APPLI. 7