

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Différentiabilité</b>	<b>9</b>
1.1	Applications différentiables . . . . .	11
1.1.1	Premières définitions . . . . .	11
1.1.2	Définitions, notations et remarques diverses. . . . .	12
1.1.3	Autres définitions, notations et remarques diverses . . . . .	13
1.1.4	Etudes de cas particuliers importants . . . . .	17
1.1.5	Propriétés algébriques de la différentiation . . . . .	19
1.1.6	Applications de plusieurs variables . . . . .	22
1.1.7	Matrices jacobiniennes . . . . .	25
1.2	Théorèmes des accroissements finis . . . . .	27
1.2.1	Le théorème des accroissements finis . . . . .	27
1.2.2	Remarques importantes . . . . .	30
1.2.3	Théorème de la moyenne . . . . .	30
1.2.4	Influence du théorème des accroissements finis classique . . . . .	32
1.2.5	Cinq applications du théorème des accroissements finis . . . . .	33
1.3	Formule intégrale des accroissements finis . . . . .	42
1.3.1	Intégrale d'une application continue à une variable réelle . . . . .	42
1.3.2	Cinq propriétés de l'intégrale d'une application continue . . . . .	46
1.3.3	Primitive d'une application continue . . . . .	49
1.3.4	Continuité et différentiabilité sous le signe intégral . . . . .	50
<b>2</b>	<b>L'équation <math>f(x) = y</math></b>	<b>55</b>
2.1	Difféomorphismes . . . . .	55
2.1.1	Définitions et observations . . . . .	55
2.2	Théorème local d'inversion . . . . .	59
2.3	Théorème des fonctions implicites . . . . .	65
2.4	Théorème des extrema liés . . . . .	67
2.5	Théorème local de division . . . . .	71

<b>3</b>	<b>Différentiabilité d'ordre supérieur</b>	<b>75</b>
3.1	Différentielle seconde . . . . .	75
3.1.1	Premières définitions . . . . .	75
3.1.2	Le théorème de Schwarz . . . . .	77
3.1.3	Le théorème de Taylor-Young . . . . .	81
3.1.4	Exemples d'applications deux fois différentiables . . . . .	87
3.1.5	Conditions du second ordre pour les extrema et les extrema liés . . . . .	93
3.1.6	Applications de plusieurs variables . . . . .	96
3.2	Différentielle d'ordre quelconque . . . . .	104
3.2.1	Premières définitions . . . . .	104
3.2.2	La différentielle d'ordre $n$ et son calcul . . . . .	106
3.2.3	Action « tronquée » d'une différentielle multiple . . . . .	109
3.2.4	Le théorème de Schwarz . . . . .	110
3.2.5	Le théorème de Taylor-Young . . . . .	111
3.2.6	Exemples d'applications $n$ -fois différentiables . . . . .	114
3.2.7	Applications de plusieurs variables . . . . .	119
3.3	Théorèmes de Taylor . . . . .	122
3.3.1	Le point de vue Taylor-Lagrange . . . . .	122
3.3.2	Influence du théorème des accroissements finis classique . . . . .	124
3.3.3	Le point de vue « formule intégrale » . . . . .	125
3.4	Fonctions convexes . . . . .	126
3.4.1	Convexité et continuité . . . . .	126
3.4.2	Convexité et différentiabilité . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Les équations différentielles</b>	<b>135</b>
4.1	Généralités . . . . .	135
4.2	Les solutions maximales . . . . .	138
4.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard . . . . .	141
4.4	Existence et unicité de la solution maximale . . . . .	145
4.5	Le théorème d'Arzela-Peano . . . . .	151
4.6	Le théorème des « bouts » . . . . .	154
4.7	Comparaison des solutions . . . . .	158
4.8	Condition initiale et paramètre . . . . .	166
4.8.1	Continuité par rapport à la condition initiale et au paramètre . . . . .	167
4.8.2	Différentiabilité par rapport à la condition initiale . . . . .	169
4.8.3	Différentiabilité par rapport à la condition initiale et au paramètre . . . . .	178
4.9	Equations différentielles linéaires . . . . .	180
4.9.1	Considérations générales et théorème du résolvant . . . . .	180
4.9.2	Que faire lorsqu'il y a un second membre ? . . . . .	185
4.9.3	Que dire lorsque l'application $A$ est constante ? . . . . .	187
4.9.4	Cas où l'espace vectoriel $E$ est de dimension finie . . . . .	188

4.9.5	Que dire lorsque l'application $A$ est constante et l'espace vectoriel $E$ de dimension finie ? . . . . .	197
4.10	Equations différentielles linéaires d'ordre $n$ . . . . .	199
4.10.1	Quelques généralités . . . . .	199
4.10.2	Que dire de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$ ? . . . . .	201
4.10.3	Comment effectuer la méthode de « variation des constantes » dans le cas de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$ . . . . .	204
4.10.4	Que dire si les fonctions coefficients $a_j$ sont constantes . . . . .	207
4.11	Quelques équations « aux dérivées partielles » . . . . .	213
4.11.1	Définition des équations aux dérivées partielles étudiées . . . . .	213
4.11.2	Quatre propriétés du flot d'un champ de vecteur . . . . .	215
4.11.3	Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations aux dérivées partielles semi-linéaires . . . . .	221