

# Table des matières

<b>Chapitre préliminaire : Théorie des ensembles</b> .....	1
1. <i>Axiome du choix</i> .....	2
2. <i>Théorème de Zorn</i> .....	3
3. <i>Produit cartésien d'ensembles</i> .....	6
4. <i>Les entiers</i> .....	10
5. <i>Représentations numériques – Système « décimal »</i> .....	16
a) <i>Introduction – Problèmes de vocabulaire</i> .....	16
b) <i>Définitions usuelles de « dix »</i> .....	17
c) <i>Relativité des définitions</i> .....	21
d) <i>Ensuite...</i> .....	24
6. <i>Raisonnements mathématiques ou algébrisation du bon sens</i> ...	26
<b>Chapitre I. Groupes</b> .....	33
1. <i>Notion de groupe</i> .....	33
2. <i>Groupes finis</i> .....	40
3. <i>Sous-groupes, sous-groupes engendrés</i> .....	42
4. <i>Treillis des sous-groupes d'un groupe</i> .....	45
<b>Chapitre II. Homomorphismes de groupes</b> .....	53
1. <i>Homomorphismes, noyaux, images</i> .....	53
2. <i>Automorphismes intérieurs, normalité</i> .....	57
3. <i>Exemple fondamental : homomorphismes de <math>\mathbb{Z}</math> dans <math>G</math></i> .....	61
4. <i>Sous-groupes monogènes et cycliques</i> .....	64
5. <i>Groupe symétrique</i> .....	67

<b>Chapitre III. Classes modulo un sous-groupe – Quotients</b> . . . . .	77
1. <i>Classes modulo <math>H</math></i> . . . . .	77
2. <i>Notion d'indice</i> . . . . .	78
3. <i>Groupes quotients par des sous-groupes normaux</i> . . . . .	80
a) <i>Existence et construction des quotients</i> . . . . .	81
b) <i>Théorèmes de factorisation</i> . . . . .	85
c) <i>Etude des groupes engendrés par un élément</i> . . . . .	88
4. <i>Propriétés arithmétiques des groupes cycliques</i> . . . . .	91
<b>Chapitre IV. Produits directs</b> . . . . .	99
1. <i>Produit direct de groupes</i> . . . . .	99
2. <i>Produit direct interne de sous-groupes</i> . . . . .	101
<b>Chapitre V. Produits semi-directs</b> . . . . .	107
1. <i>Produit semi-direct de <math>H</math> par <math>K</math></i> . . . . .	107
2. <i>Produit semi-direct interne de <math>H</math> par <math>K</math></i> . . . . .	109
3. <i>Applications à la géométrie</i> . . . . .	112
4. <i>Conclusion</i> . . . . .	122
<b>Chapitre VI. Groupes opérant – Théorèmes de Sylow</b> . . . . .	123
1. <i>Lois d'opérations de groupes</i> . . . . .	123
2. <i>Propriétés générales</i> . . . . .	124
3. <i>Théorèmes de Sylow</i> . . . . .	128
4. <i>Classification des groupes abéliens finis</i> . . . . .	135
<b>Chapitre VII. Anneaux commutatifs</b> . . . . .	143
1. <i>Anneaux, anneaux de polynômes</i> . . . . .	143
2. <i>Idéaux d'un anneau, idéaux premiers, maximaux</i> . . . . .	148
3. <i>Homomorphismes, quotients</i> . . . . .	154
a) <i>Homomorphismes d'anneaux</i> . . . . .	154
b) <i>Anneaux quotients</i> . . . . .	155
c) <i>Théorème de factorisation des homomorphismes</i> . . . . .	157
d) <i>Caractérisation des idéaux premiers, maximaux</i> . . . . .	158
4. <i>Exemple fondamental des anneaux de polynômes</i> . . . . .	159

<b>Chapitre VIII. Produits d'anneaux – Théorèmes chinois</b> . . . . .	167
1. <i>Produit d'anneaux, idempotents</i> . . . . .	167
2. <i>Les anneaux <math>\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}</math>, les groupes <math>(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*</math></i> . . . . .	172
<b>Chapitre IX. Méthodes modulaires dans un anneau principal</b> .	181
1. <i>Co-maximalité dans un anneau principal</i> . . . . .	182
2. <i>Méthode des idempotents</i> . . . . .	184
3. <i>Applications classiques</i> . . . . .	186
4. <i>Calculs par développements multi-adiques</i> . . . . .	194
<b>Chapitre X. Anneaux commutatifs intègres – Caractéristique</b> .	199
1. <i>Diviseurs de zéro, intégrité</i> . . . . .	199
2. <i>Corps des fractions d'un anneau intègre</i> . . . . .	200
3. <i>Etude des anneaux principaux</i> . . . . .	207
4. <i>Les nombres algébriques et transcendants</i> . . . . .	209
5. <i>Caractéristique d'un anneau</i> . . . . .	210
a) <i>Cas général</i> . . . . .	210
b) <i>Cas des anneaux intègres et des corps</i> . . . . .	212
c) <i>Caractéristique d'un produit d'anneaux</i> . . . . .	213
6. <i>Exercices sur les fractions</i> . . . . .	214
<b>Chapitre XI. Divisibilité – Anneaux factoriels</b> . . . . .	217
1. <i>Irréductibilité, association, factorialité</i> . . . . .	217
2. <i>Propriétés des anneaux factoriels</i> . . . . .	220
a) <i>Valuations d'un anneau factoriel, p.g.c.d., p.p.c.m.</i> . . . . .	220
b) <i>Propriétés des p.g.c.d., éléments premiers entre eux</i> . . . . .	223
c) <i>Divisibilité dans les anneaux factoriels</i> . . . . .	226
3. <i>Factorialité des anneaux principaux</i> . . . . .	227
4. <i>Factorialité de <math>A[X]</math> pour <math>A</math> factoriel</i> . . . . .	233
a) <i>Valuation et contenu d'un polynôme de <math>K_A[X]</math></i> . . . . .	233
b) <i>Factorialité de <math>A[X]</math></i> . . . . .	235
c) <i>Méthodes de factorisation des polynômes</i> . . . . .	237
5. <i>Arithmétique dans un anneau</i> . . . . .	242
6. <i>Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></i> . . . . .	247

7. Anneaux euclidiens . . . . .	253
8. Formule du produit pour les métriques de $\mathbb{Q}$ . . . . .	255
<b>Chapitre XII. Extensions de corps</b> . . . . .	257
1. Notion d'extension . . . . .	259
2. Sous-extensions engendrées par des parties . . . . .	260
3. Degré d'une extension . . . . .	262
4. Eléments algébriques, transcendants sur un corps . . . . .	263
5. Extensions algébriques, transcendantes . . . . .	267
6. Disjonction linéaire d'extensions . . . . .	272
<b>Chapitre XIII. Construction d'extensions – Clôture algébrique</b> 277	
1. Racines d'un polynôme dans une extension . . . . .	277
2. Théorèmes fondamentaux d'existence . . . . .	279
3. Théorème de prolongement des isomorphismes . . . . .	285
4. Notion de $k$ -isomorphisme . . . . .	290
<b>Chapitre XIV. Groupe des automorphismes d'une extension</b> . . 291	
1. $k$ -Automorphismes . . . . .	291
2. Extensions algébriques normales . . . . .	293
3. Séparabilité . . . . .	296
4. Dérivée formelle des polynômes, séparabilité . . . . .	299
5. Extensions finies galoisiennes . . . . .	302
<b>Chapitre XV. Les corps finis</b> . . . . .	307
1. Classification des corps finis . . . . .	307
2. Génération pratique des corps finis . . . . .	311
<b>Chapitre XVI. Théorie de Galois</b> . . . . .	317
1. Corps fixes, lemme d'Artin . . . . .	317
2. Correspondance de Galois . . . . .	320
<b>Chapitre XVII. Corps cyclotomiques – Théorie de Kummer</b> . . 341	
1. Racines $n$ -ièmes de l'unité . . . . .	341
2. Extensions cyclotomiques de $\mathbb{F}_q$ et de $\mathbb{Q}$ . . . . .	342

a ) Corps cyclotomiques sur $\mathbb{F}_q$ .....	342
b ) Corps cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ .....	343
3. Théorie de Kummer .....	350
<b>Chapitre XVIII. Résolubilité par radicaux – Applications</b> .....	359
1. Résolubilité par radicaux .....	359
2. Les constructions à la règle et au compas .....	365
a ) Constructions élémentaires .....	365
b ) Caractérisation des figures constructibles .....	369
<b>Chapitre XIX. Modules arithmétiques – Groupes abéliens</b> .....	377
1. $A$ -modules, notion de rang .....	377
2. Structure des modules de type fini sur $A$ principal .....	388
3. Algorithme de Smith .....	391
4. Bases adaptées (cas euclidien) .....	399
5. Produit tensoriel de $A$ -modules .....	404
a ) Combinaisons $A$ -linéaires formelles .....	404
b ) Applications bilinéaires .....	406
c ) Existence du produit tensoriel .....	407
d ) Propriétés du produit tensoriel .....	410
e ) Produit tensoriel d'applications linéaires .....	416
f ) Notion de symbole arithmétique .....	416
6. Exemples de $A$ -algèbres .....	418
<b>Chapitre XX. Sous-groupes de <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	427
1. Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ , sous-groupes discrets .....	427
2. Réseaux dans $\mathbb{R}^n$ .....	431
3. Théorème de Jacobi–Bravais .....	436
4. Approximations diophantiennes simultanées .....	438
5. Equations diophantiennes linéaires .....	439
6. Sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ .....	443
7. Théorème de Kronecker .....	445

<b>Chapitre XXI. Géométrie dans les réseaux</b> .....	451
1. <i>Théorème de Minkowski</i> .....	451
2. <i>Inégalités diophantiennes</i> .....	454
3. <i>Equations diophantiennes classiques</i> .....	457
<b>Chapitre XXII. Entiers algébriques</b> .....	461
1. <i>Entiers sur un sous-anneau</i> .....	461
2. <i>Clôtures et fermetures intégrales</i> .....	464
3. <i>Entiers des corps quadratiques</i> .....	468
4. <i>Trace, norme, discriminant</i> .....	470
5. <i>Entiers algébriques</i> .....	473
6. <i>Entiers des corps cyclotomiques</i> .....	478
<b>Chapitre XXIII. Etude géométrique des anneaux d'entiers</b> ....	481
1. <i>Plongement canonique d'un corps de nombres</i> .....	481
2. <i>Plongement de <math>Z_K</math> et de ses idéaux</i> .....	484
3. <i>Inégalités métriques dans les corps de nombres</i> .....	487
<b>Chapitre XXIV. Approximations par les fractions continues</b> ..	489
1. <i>Développements en fractions continues</i> .....	489
2. <i>Fractions continues généralisées</i> .....	490
3. <i>Propriétés des convergents</i> .....	495
4. <i>Théorème fondamental d'approximation</i> .....	498
5. <i>Calculs modulaires en rationnels</i> .....	503
6. <i>Unités des corps quadratiques réels</i> .....	508
<b>Annexe. Représentations – Déterminants de Frobenius</b> .....	519
1. <i>Introduction</i> .....	519
2. <i>Notations générales</i> .....	520
3. <i>Les déterminants de groupes</i> .....	521
4. <i>Calcul pratique des <math>P^\varphi(X)</math></i> .....	521
<b>Bibliographie</b> .....	525
<b>Index</b> .....	533