

# ■ Formulaire d'analyse vectorielle ■

## ■ Composition d'opérateurs      Composition de champs

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (V_1 V_2) = V_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 + V_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (V \vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}$$

$$\text{div} (V \vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}$$

$$\text{div} (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2$$

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

**Théorème d'Ostrogradsky :**  $\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{A} \, d\tau$

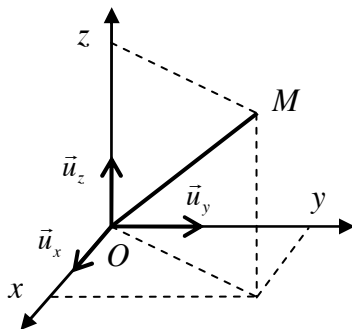
Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur à cette surface.

**Théorème de Stokes :**  $\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{M} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$

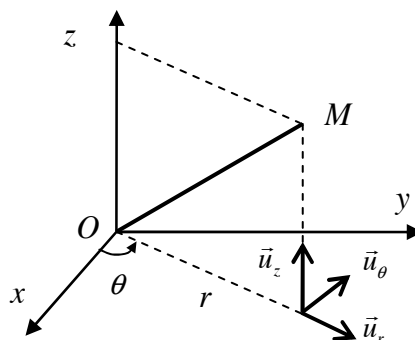
La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

## ■ Systèmes de coordonnées

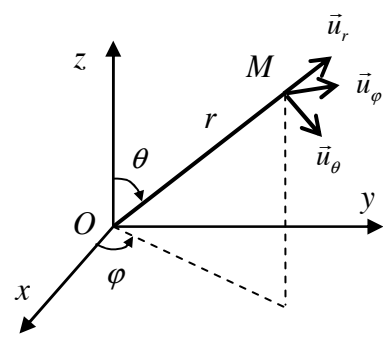
cartésiennes



cylindriques



sphériques



## ■ Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \overline{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \overline{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overline{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \overline{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Les vecteurs unitaires  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tous une divergence et un rotationnel nuls.

## ■ Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vecteurs unitaires :  $\text{div } \vec{u}_r = \frac{1}{r}$  ;  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_r = \vec{0}$  ;  $\text{div } \vec{u}_\theta = 0$  ;  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{r}$  ;  $\text{div } \vec{u}_z = 0$  ;  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z = \vec{0}$

## ■ Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Quelques résultats utiles :  $\text{div } \vec{u}_r = \frac{2}{r}$  ;  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_r = \vec{0}$  ;  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_z}{r \sin \theta}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$

NB : Ne pas utiliser l'opérateur Nabla en coordonnées cylindriques ou sphériques.

## ■ Petit formulaire pour les calculs en physique

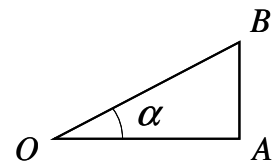
### ■ Équation du second degré

Avant de chercher les solutions d'une équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , il est impératif d'obtenir des renseignements sur le signe des racines (ou de leur partie réelle); pour cela il suffit de voir le signe de leur somme  $S = -b/a$  et de leur produit  $P = c/a$ .

### ■ Formules de trigonométrie

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{OB}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OA}{OB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{OA}$$



Il faut connaître les formules de trigonométrie, en particulier :  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

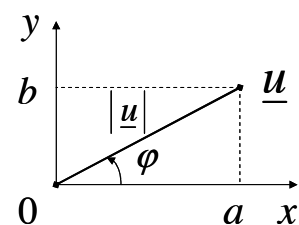
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (\text{le - d'abord !})$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad \text{et} \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

### ■ Les nombres complexes

– dans l'écriture mathématique  $\underline{u} = a + ib$  apparaissent les parties réelle  $a = |\underline{u}| \cos \varphi$  et imaginaire  $b = |\underline{u}| \sin \varphi$ , avec  $|\underline{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\varphi = \arg \underline{u} = \arctan(b/a)$  (à  $\pi$  près, il faut en plus préciser  $\sin \varphi$  ou  $\cos \varphi$ ) soit  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ .



– en physique, on préfère souvent écrire  $\underline{u} = |\underline{u}| \exp(i\varphi)$  en faisant apparaître directement le module  $|\underline{u}|$  et la phase (ou argument)  $\varphi$ .

$$\text{Rappel : } \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|} \quad \text{et} \quad \arg \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \arg \underline{u}_2 - \arg \underline{u}_1$$

## ■ Projection d'un vecteur

Il faut particulièrement veiller aux signes des projections.

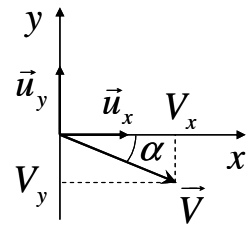
sur la figure :  $V_x = \vec{V} \cdot \vec{u}_x > 0$  et  $V_y = \vec{V} \cdot \vec{u}_y < 0$

avec  $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$

Théorème de Pythagore :  $V^2 = V_x^2 + V_y^2$  car  $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$

Avec l'angle  $\alpha$  (pris positif),  $V_x = V \cos \alpha > 0$  et  $V_y = -V \sin \alpha < 0$

Le théorème de Pythagore redonne  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .



## ■ Moyenne de fonctions temporelles

Si  $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , alors sur une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $\langle u \rangle = 0$  et  $\langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} u_0^2$

Utilisation de la notation complexe pour les grandeurs énergétiques moyennes (attention, aucune grandeur énergétique ne peut être complexe !).

Si  $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$  et  $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , alors :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \cdot \underline{g}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \cdot \underline{g}) = \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \varphi \quad \text{et} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{1}{2} |\underline{f}|^2$$

## ■ Formule de Taylor à l'ordre 1

Il faut savoir faire le lien entre :

– l'écriture mathématique :  $f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + \dots$

– et l'écriture physique :  $u(x_0 + dx) - u(x_0) = du = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_0} dx + \dots$

Pour  $x$ ,  $|x| \ll 1$ , on a  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ ,  $\tan x \approx x$ ,  $\ln(1+x) \approx x$ ,  $e^x \approx 1+x$ ,  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \dots$

Et si  $u(x, y)$  est une fonction de deux variables, à l'ordre 1 :  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

Le théorème de Schwarz indique que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

## ■ Une grandeur petite ne doit être prise nulle

De la même manière qu'en mathématique une fonction n'est pas « équivalente à zéro », en physique non plus une grandeur petite ne doit être prise nulle ; si elle intervient dans une fonction, il suffit (en général) de prendre le premier terme non nul du développement limité de cette fonction.

En revanche, à l'ordre un en  $\varepsilon$ , on a simplement  $\varepsilon \cdot f(\varepsilon) = \varepsilon [f(0) + f'(0)\varepsilon + \dots] \approx \varepsilon \cdot f(0)$ .

## ■ Formule du binôme

---

Surtout appliquée aux développements limités ( $\varepsilon$  tel que  $|\varepsilon| \ll 1$  est l'infiniment petit)

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \varepsilon^2 + \dots$$

Par exemple :  $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$  ;  $\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$  ;  $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}$

Dans le cas  $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$ , il ne faut pas faire d'abord le développement limité de la racine puis celui de l'inverse, mais les deux simultanément !

## ■ Disque, cylindre et sphère

---

**Disque** : périmètre  $2\pi r$  ; surface  $\pi r^2$  ; élément de surface d'une couronne circulaire entre  $r$  et  $r+dr$  :  $2\pi r dr$  .

**Cylindre** : surface latérale  $2\pi r h$  ; volume  $\pi r^2 h$  ; élément de volume d'une coquille circulaire entre  $r$  et  $r+dr$  :  $2\pi r dr h$  .

**Sphère** : surface  $4\pi r^2$  ; volume  $\frac{4\pi r^3}{3}$  ; élément de volume d'une coquille sphérique entre  $r$  et  $r+dr$  :  $4\pi r^2 dr$  .

## ■ Équation différentielle du premier ordre

---

$$\text{du type : } \tau \frac{dx}{dt} + x = x_0 \cos \omega t$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime transitoire** (ou libre en l'absence d'excitation  $x_0 \cos \omega t$ ) est solution de

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau} \text{ soit } x_t(t) = A \exp(-t/\tau) ; \text{ ce régime transitoire tend vers zéro.}$$

– **le régime forcé** (par l'excitation) est une solution particulière recherchée sous la forme d'une fonction de même pulsation  $\omega$ , mais déphasée (retard  $\varphi$ ),

$x_f(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$ , soit en passant en notation complexe :

$$(i\omega\tau + 1)\underline{x} = x_0 \Rightarrow \underline{x} = X e^{-i\varphi} = \frac{x_0}{1 + i\omega\tau} \text{ d'où } X = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \text{ et } \tan \varphi = \omega\tau$$

NB : La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale  $x_t(t) + x_f(t)$  !

## ■ Équation différentielle classique du second ordre

---

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  admet comme solution :  $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$  ou  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$  admet comme solution :  $x(t) = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}$  ou  $x(t) = A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t$

## ■ Équation différentielle du second ordre en régime forcé

---

du type :  $a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = e \cos(\omega t)$  où  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  et  $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$

Les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont constants (et positifs pour un système physique)

Le régime forcé (par l'excitation  $e \cos(\omega t)$  à la pulsation  $\omega$ ) est une solution particulière de l'équation, elle-même de pulsation  $\omega$ , mais déphasée (retard  $\varphi$ ) sur l'excitation :

$u(t) = U \cos(\omega t - \varphi)$ , soit en passant obligatoirement en **notation complexe** :

$$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{u} = e \Rightarrow \underline{u} = U e^{-i\varphi} = \frac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega} \text{ d'où par module et argument :}$$

$$U = \frac{e}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \text{ et } \tan \varphi = \frac{b\omega}{c - a\omega^2} \text{ (à préciser par le signe de } \sin \varphi \text{)}$$

## ■ Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

---

du type :  $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = e \cos(\omega t)$  où  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  et  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime libre** (car l'excitation  $e \cos(\omega t)$  disparaît) est solution de  $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$

L'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$  avec en physique les trois constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  positives, conduit à  $S = -b/a \leq 0$  et  $P = c/a \geq 0$  d'où les deux cas :

- si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  (ce qui suppose un fort coefficient de frottement  $b$ ), les deux racines sont réelles négatives, notées  $-r_1$  et  $-r_2$ , d'où une solution en exponentielles décroissantes :  $x(t) = A \exp(-r_1 t) + B \exp(-r_2 t)$  appelé régime transitoire (car il tend vers zéro) apériodique
- si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  (ce qui suppose un faible coefficient de frottement  $b$ ), les deux racines sont complexes conjuguées à partie réelle négative, notées  $-r \pm i\Omega$ , d'où une solution (somme des 2 exponentielles complexes) oscillatoire d'amplitude en exponentielle décroissante :

$$x(t) = \exp(-rt) \cdot (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \text{ ou } x(t) = \alpha \exp(-rt) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{ou } x(t) = \beta \exp(r_1 t) + \gamma \exp(r_2 t) \text{ (} r_1 \text{ et } r_2 \text{ racines complexes)}$$

appelé régime transitoire pseudopériodique

À noter que dans tous les cas, le régime transitoire disparaît (tend vers zéro). Le régime critique est celui (un peu théorique) où  $\Delta = 0$ .

– le **régime forcé** (par l'excitation) est solution particulière de  $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = e \cos(\omega t)$  ; elle se cherche sous la forme d'une fonction de même pulsation, mais déphasée (retard  $\varphi$ ) :  $x(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$ , soit en passant en notation complexe :

$$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{x} = e \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = X e^{-i\varphi} = \frac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega} \quad \text{d'où } X \text{ et } \tan \varphi$$

NB : la détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale !

# Chapitre 1

## ■ Électronique ■

---

### Les ordres de grandeur utiles

#### Les composants

Résistances en électronique	1 k $\Omega$ à 1 M $\Omega$
Capacités en électronique	1 nF à 100 $\mu$ F

#### Le matériel de TP

Temps de montée du créneau d'un GBF	$dV/dt \approx 50 \text{ V}/\mu\text{s}$
Résistance de sortie d'un GBF	50 $\Omega$
Fréquence maximum d'un GBF	10 MHz
Bande passante d'un oscilloscope	60 MHz
Impédance d'entrée d'un oscilloscope	$R_e = 1 \text{ M}\Omega // C_e = 10 \text{ pF}$

#### L'amplificateur linéaire intégré (ALI)

Amplification en continu	$\mu_0 \approx 10^5 \text{ à } 10^6$
Bande passante	$f_0 \approx 10 \text{ Hz à } 1 \text{ kHz}$
Intensité maximale du courant de sortie	10 mA
Vitesse de balayage	$dV/dt \approx 10 \text{ V}/\mu\text{s}$

#### Le multiplieur AD 633

Coefficient multiplicatif	$k = 0,10 \text{ V}^{-1}$ .
Bande passante	500 kHz

#### Le matériel de TP

Temps de montée du créneau d'un GBF	$dV/dt \approx 50 \text{ V}/\mu\text{s}$
Résistance de sortie d'un GBF	50 $\Omega$
Fréquence maximum d'un GBF	10 MHz
Bande passante d'un oscilloscope	60 MHz
Impédance d'entrée d'un oscilloscope	$R_e = 1 \text{ M}\Omega // C_e = 10 \text{ pF}$