1 Complexes. Polynômes

1.1 Nombres complexes

Exercice 1.

Calculer $C = \dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$. ($n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$)

• Si $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, écrivons $2C = 1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx$.
Pour tout entier k, $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ donc $2C = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.
On reconnaît une somme de $2n+1$ termes en progression géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$ et de premier terme e^{-inx} d'où :

$$2C = e^{-inx}\frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = e^{-inx}.\frac{e^{i(n+1/2)x}}{e^{ix/2}}.\frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{i(n+1/2)x}}{\left(e^{-ix/2} - e^{ix/2}\right)}$$

et il reste après simplification :

$$2C = \frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \frac{-2i\sin(n+1/2)x}{-2i\sin(x/2)} = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

puisque pour tout entier k on a $e^{-ikx} - e^{ikx} = -2i\sin kx$.
Finalement :

$$C = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

• Si $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$C = n + \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer que la somme des solutions de cette équation est nulle.
   En déduire que $\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Exprimer $\cos(4\pi/5)$ en fonction de $\cos(2\pi/5)$ puis calculer $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.

1. Posons $z = re^{i\theta}$, $(r \in \mathbb{R}_+)$.
   $z^5 = 1$ implique $r^5 e^{i5\theta} = 1$ donc $r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
   Les 5 solutions de l'équation $z^5 = 1$ s'écrivent $\mathrm{e}^{i2k\pi/5}$ avec $k \in [\![0, 4]\!]$.
2. Soit $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} e^{i2k\pi/5}$. C'est la somme de 5 nombres complexes en progression géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i2\pi/5} \neq 1$ donc :
   $$S = \frac{1 - \left(e^{i2\pi/5}\right)^5}{1 - e^{i2\pi/5}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i2\pi/5}} = 0.$$
   Ecrivons que la partie réelle de S est nulle. On obtient :
   $$1 + \sum_{k=1}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0.$$
   Mais comme $\cos(6\pi/5) = \cos(4\pi/5)$ et $\cos(8\pi/5) = \cos(2\pi/5)$ il reste dans cette somme $1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) = 0$ soit :
   $$\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) = -\frac{1}{2}.$$
3. Partons de $1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) = 0$. On remplace $\cos(4\pi/5)$ par $2\cos^2(2\pi/5) - 1$ pour obtenir :
   $$4\cos^2(2\pi/5) + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0.$$
   On pose $X = 2\cos(2\pi/5)$ et il vient $X^2 + X - 1 = 0$ dont les solutions sont $X = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puisque $\cos(2\pi/5) > 0$ on ne garde que la valeur positive de X donc $\cos(2\pi/5) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et par suite :
   $$\cos(4\pi/5) = -\frac{1}{2} - \cos(2\pi/5) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \sin(nx/2) \times \frac{\sin\left[(n+1)\,x/2\right]}{\sin(x/2)}.$$

$\sum_{k=0}^{n} \sin kx$ est la partie imaginaire de $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ qui est la somme de $n+1$ nombres complexes en progression géométrique de raison $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$ et de premier terme 1. Ainsi :
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x/2}\left(\mathrm{e}^{-i(n+1)x/2} - \mathrm{e}^{i(n+1)x/2}\right)}{\mathrm{e}^{ix/2}\left(\mathrm{e}^{-ix/2} - \mathrm{e}^{ix/2}\right)}.$$
On utilise les formules d'Euler pour remplacer $\left(\mathrm{e}^{-i(n+1)x/2} - \mathrm{e}^{i(n+1)x/2}\right)$ par $-2i\sin\left[(n+1)x/2\right]$ et $\left(\mathrm{e}^{-ix/2} - \mathrm{e}^{ix/2}\right)$ par $-2i\sin(x/2)$. On obtient :
$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{inx/2} \times \frac{\sin\left[(n+1)\,x/2\right]}{\sin(x/2)}.$$
Comme $\mathrm{e}^{inx/2} = \cos(nx/2) + i\sin(nx/2)$, il vient :
$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \sin(nx/2) \times \frac{\sin\left[(n+1)\,x/2\right]}{\sin(x/2)}.$$

Exercice 4.

Soit le nombre complexe $z = 1 + i$. Déterminer pour quelles valeurs de l'entier n, z^n est un réel, un imaginaire.

Ecrivons z sous sa forme trigonométrique. Il vient $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$ d'où :
$$z^n = (\sqrt{2})^n \mathrm{e}^{in\pi/4} = (\sqrt{2})^n \left[\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4)\right].$$

1. z^n est un imaginaire à condition que $\cos n\pi/4 = 0$ c'est-à-dire si : $n\pi/4 = (2k+1)\pi/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit :
$$n = 4k + 2, \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$
2. z^n est un réel lorsque $\sin n\pi/4 = 0$. Ceci se produit lorsque : $n\pi/4 = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc si :
$$n = 4k \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Exercice 5.

Soit z le nombre complexe $\dfrac{-1+i}{4}$.

1. Ecrire z sous forme trigonométrique.
2. Calculer les racines cubiques de z que l'on écrira sous forme trigonométrique.
3. Montrer qu'une seule de ces racines a une puissance quatrième réelle.

1. Calculons le module de z. On a $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Ainsi si θ est un argument de z :
$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et l'écriture de z sous forme trigonométrique est :
$$z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i3\pi/4} = \frac{1}{2^{3/2}}\mathrm{e}^{i3\pi/4}.$$
2. Soit $re^{i\alpha}$ une racine cubique de z ($r \in \mathbb{R}_+$).
On a alors $r^3\mathrm{e}^{i3\alpha} = \dfrac{1}{2^{3/2}}e^{i3\pi/4}$ et par identification, il vient :
$$r = \left(\frac{1}{2^{3/2}}\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\ , (k \in \mathbb{Z}).$$
Les trois solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont les nombres complexes $z_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})}$ où $k \in [\![0,2]\!]$. Par conséquent :
$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\pi/4} \quad ; \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i11\pi/12} \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i19\pi/12}$$
sont les trois racines cubiques de z.
3. $z_0^4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 e^{i\pi} = -\dfrac{1}{4}$ et c'est un réel. z_1^4 et z_2^4 ne sont pas des réels.

1.2 Division euclidienne - Racines

Exercice 6.

Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par :

1. $(X + 1)(X - 2)$.
2. $(X - 1)^2$.

1. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :
   $X^n + 1 = (X + 1)(X - 2)Q(X) + R(X)$ avec degré de $R < 2$. Posons alors $R(X) = aX + b$. En remplaçant successivement X par -1 et 2 on obtient le système :
   $\begin{cases} (-1)^n + 1 = -a + b \\ 2^n + 1 = 2a + b \end{cases} \implies a = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}; b = 1 + \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3}$
   donc :
   $$R(X) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + 1 + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}.$$
2. Il existe un unique couple (Q_1, R_1) avec $R_1(X) = a_1 X + b_1$ tel que :
   $X^n + 1 = (X - 1)^2 Q_1(X) + a_1 X + b_1 \quad (1)$. En dérivant on obtient une seconde relation :
   $$nX^{n-1} = 2(X - 1)Q_1(X) + (X - 1)^2 Q_1'(X) + a_1 \ (2).$$
   En remplaçant X par 1 dans (1) et (2) il vient :
   $\begin{cases} 2 = a_1 + b_1 \\ n = a_1 \end{cases}$ d'où $a_1 = n$, $b_1 = 2 - n$ et :
   $$R_1(X) = nX + (2 - n).$$

Exercice 7 (Polynômes 1-périodique)**.**

Soit un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation $P(x + 1) = P(x)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x + 1) = P(x)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(n + 1)$.
Posons $Q(x) = P(x) - P(0)$. Pour tout entier n, on a $Q(n) = 0$.
Q admet une infinité de racines. Ce ne peut être que le polynôme nul. Donc le polynôme P est un polynôme constant égal à $P(0)$.

Exercice 8.

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Un calcul montre que $A^2 = A + 2I$.
Montrer que $\forall n \geq 2$, il existe deux polynômes Q_n et R_n tels que :
$X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$ où $\deg(R_n) < 2$.
Déterminer R_n. En déduire l'expression de A^n en fonction de I, A et n, pour $n \geq 0$.

• Le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme annulateur de A.
On effectue la division euclidienne de X^n par $(X^2 - X - 2)$. Il existe un couple unique de polynômes (Q_n, R_n) tel que :

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X) \text{ avec } \deg(R_n) < 2 \ (1).$$

On pose $R_n(X) = a_n X + b_n$.
• On remplace successivement X par -1 et 2 dans (1) et on obtient le système :
$$\begin{cases} (-1)^n = -a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases} \quad \text{d'où on déduit} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ b_n = \dfrac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \end{cases}$$
Si dans (1) on remplace X par A, il vient :

$$A^n = a_n A + b_n I = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)A + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)I.$$

Exercice 9.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles. Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geq P(x)P''(x)$.
Réciproquement si pour tout réel x, $P'^2(x) \geq P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?

• Si P est un polynôme constant alors $P' = P'' = 0$ et il est clair que $P'^2(x) \geq P(x)P''(x)$. On suppose pour la suite que P n'est pas constant.

• Rappel : si n fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables sur un intervalle I alors $\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\right]$ est dérivable sur I. Sa dérivée est donnée par :

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_j.$$

Appelons $(a_1, \dots, a_n)$ la famille des racines réelles de la fonction polynôme P. Sous sa forme factorisée, P s'écrit : $P(x) = C\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ où $C \in \mathbb{R}^*$.
La fonction polynôme P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$P'(x) = C\left[\prod_{i=2}^{n}(x-a_i) + \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n}(x-a_i) + \cdots + \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq n-1}}^{n}(x-a_i) + \prod_{i=1}^{n-1}(x-a_i)\right].$$

On obtient alors : $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i}$ et en dérivant une seconde fois sur $\mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}$, on aboutit à : $\dfrac{P''(x)P(x) - P'^2(x)}{P^2(x)} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-a_i)^2}$ d'où :

$$P'^2(x) - P''(x)P(x) = P^2(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-a_i)^2} = C^2\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1,k\neq i}^{n}(x-a_j)^2\right].$$

On peut conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'^2(x) - P''(x)P(x) \geqslant 0 \ \text{ soit } P'^2(x) \geq P(x)P''(x).$$

• Réciproquement considérons la fonction polynôme $P(x) = x^3 + 5x$.
Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a $P'(x) = 3x^2 + 5$ et $P''(x) = 6x$.
Dans ces conditions :

$$P'^2(x) - P(x)P''(x) = (3x^2+5)^2 - 6x(x^3+5x) = 3x^4 + 25 \geqslant 0.$$

Cependant P n'a que 0 comme racine réelle. Les deux autres sont complexes et valent $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.
La réciproque est fausse.

1.3 Polynômes de Tchébychev

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère la suite de polynômes de E définie par :

$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X,$ et $\forall\, n \geq 2,\ T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X).$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$. En déduire que T_n est de même parité que n.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.
   En déduire que T_n admet n racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$ et donner une expression de T_n sous forme factorisée.
   Donner les valeurs de $T_n(-1)$, $T_n(0)$, $T_n(1)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la proposition : T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
   P_1 et P_2 sont vraies puisque $T_1(X) = X$ et $T_2(X) = 2X^2 - 1$. Supposons P_n et P_{n+1} vraies.
   Le coefficient dominant de $2XT_{n+1}(X)$ est $2.2^n = 2^{n+1}$ et son degré est la somme des degrés de $2X$ et de $T_{n+1}(X)$, c'est-à-dire $n+2$. Comme le degré de $2XT_{n+1}(X)$ est supérieur à celui de $T_n(X)$, le degré et le terme dominant de $2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ sont ceux de $2XT_{n+1}$. On peut conclure que T_{n+2} est un polynôme de coefficient dominant 2^{n+1} et de degré $n+2$. Ainsi P_{n+2} est vraie.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons Q_n la proposition : $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.
   Puisque $T_0(-X) = (-1)^0 T_0(X)$ et $T_1(-X) = -X = (-1)^1 T_1(X)$, Q_0 et Q_1 sont vraies. Supposons Q_n et Q_{n+1} vraies c'est-à-dire :
   $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$.
   On a alors :
   $$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) \\ &= 2(-X)(-1)^{n+1} T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}\left[2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\right] = (-1)^{n+2} T_{n+2}(X). \end{aligned}$$
   C'est ce qu'il fallait démontrer. Ainsi Q_{n+2} est vraie.