

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Complexes. Polynômes</b>	<b>11</b>
1.1	Nombres complexes . . . . .	11
1.2	Division euclidienne - Racines . . . . .	15
1.3	Polynômes de Tchébychev . . . . .	18
1.4	Une suite de polynômes . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>23</b>
2.1	Une base de $\mathbb{R}_n[X]$ . . . . .	23
2.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	24
2.3	Hyperplans . . . . .	26
2.4	Sous-espaces stables . . . . .	27
2.5	Endomorphismes . . . . .	28
2.6	Rang d'un endomorphisme . . . . .	30
2.7	Trace d'une matrice . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Somme directe. Projecteurs</b>	<b>37</b>
3.1	Somme directe . . . . .	37
3.2	Sous-espaces supplémentaires . . . . .	39
3.3	Projecteurs . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Réduction. Diagonalisation</b>	<b>49</b>
4.1	Diagonalisation . . . . .	49
4.2	Application aux suites . . . . .	74
4.3	Commutant d'un endomorphisme diagonalisable . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Matrices particulières</b>	<b>79</b>
5.1	La matrice J . . . . .	79
5.2	Matrice stochastique . . . . .	84
5.3	Matrice circulante . . . . .	85
5.4	Matrice nilpotente . . . . .	87
5.5	Matrice compagnon . . . . .	90

<b>6</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>93</b>
6.1	Produit scalaire . . . . .	93
6.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	102
6.3	Orthogonalité - Orthonormalité . . . . .	106
6.3.1	Orthogonalité . . . . .	106
6.3.2	Base orthonormée . . . . .	111
6.4	Projecteurs orthogonaux . . . . .	116
6.5	Endomorphismes symétriques . . . . .	133
6.6	Distances. Problèmes de moindres carrés . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Autres endomorphismes</b>	<b>149</b>
7.1	Endomorphisme antisymétrique . . . . .	149
7.2	Endomorphisme adjoint . . . . .	152
7.3	Isométries . . . . .	154
<b>8</b>	<b>Polynômes remarquables</b>	<b>161</b>
8.1	Polynômes de Lagrange . . . . .	161
8.2	Polynômes de Grégory . . . . .	164
8.3	Polynômes de Bernstein . . . . .	168
8.4	Polynômes de Legendre . . . . .	170
<b>9</b>	<b>Fonctions d'une variable réelle</b>	<b>173</b>
9.1	Applications du Lemme de Rolle . . . . .	173
9.2	Fonctions de classe $C^1$ . . . . .	174
9.3	Accroissements finis . . . . .	175
9.4	Fonctions réciproques . . . . .	179
9.5	Théorème du point fixe . . . . .	181
9.6	Formules de Taylor . . . . .	182
9.7	Fonctions convexes . . . . .	187
<b>10</b>	<b>Les suites numériques</b>	<b>191</b>
10.1	Suites convergentes . . . . .	191
10.2	Suite du type $U_{n+1} = f(U_n)$ . . . . .	199
10.3	Suites adjacentes . . . . .	207
10.4	Suites des racines d'une suite d'équations . . . . .	211
<b>11</b>	<b>Intégration sur un segment</b>	<b>215</b>
11.1	Intégration par parties . . . . .	215
11.2	Intégrales de Wallis. Formule de Stirling . . . . .	222
11.3	Formule de la moyenne . . . . .	226
11.4	Intégrale fonction de ses bornes . . . . .	228

11.5	Fonction définie par une intégrale . . . . .	235
<b>12</b>	<b>Les séries numériques</b>	<b>239</b>
12.1	Exemples de séries . . . . .	239
12.2	Les séries alternées . . . . .	247
12.3	Séries et intégrales . . . . .	249
12.4	Equivalents de sommes . . . . .	251
12.5	Suite liée à une série . . . . .	253
12.6	Fonctions sommes de séries . . . . .	254
12.7	La fonction Zéta . . . . .	256
<b>13</b>	<b>Intégrale généralisée</b>	<b>259</b>
13.1	Convergences d'intégrales impropres . . . . .	259
13.2	Calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ . . . . .	272
13.3	Intégrale de Gauss . . . . .	274
13.4	Autour de la fonction $\Gamma$ . . . . .	276
13.4.1	Relation entre les fonctions Gamma et Zéta . . . . .	277
13.4.2	$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ . . . . .	278
13.4.3	Convexité de la fonction $\Gamma$ . . . . .	279
13.4.4	Une intégrale très utile . . . . .	280
13.5	Séries et intégrales impropres . . . . .	281
13.5.1	Intégrale de Dirichlet . . . . .	285
13.6	Série associée à une suite d'intégrales impropres . . . . .	288
13.7	Ecriture intégrale de la constante d'Euler . . . . .	292
13.8	Fonctions définies par une intégrale impropre . . . . .	296
<b>14</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>307</b>
14.1	Normes - Normes équivalentes . . . . .	307
14.2	Continuité . . . . .	309
14.3	Recherche d'extremums . . . . .	310
14.4	Extremum sous contrainte . . . . .	326
<b>15</b>	<b>Probabilités - Variables discrètes</b>	<b>331</b>
15.1	Probabilités élémentaires . . . . .	331
15.2	Loi de probabilité . . . . .	336
15.2.1	Un exemple . . . . .	336
15.2.2	Loi du maximum et du minimum . . . . .	337
15.2.3	Loi de la somme de deux variables aléatoires . . . . .	339
15.2.4	Loi de probabilité définie par une relation de récurrence . . . . .	341
15.3	Moments . . . . .	344

15.4	Variance. Covariance . . . . .	348
15.5	Loi d'un couple . . . . .	354
15.6	Théorème de transfert . . . . .	363
15.7	Inégalité de Markov . . . . .	366
15.8	Temps d'attente . . . . .	367
15.8.1	Temps d'attente dans un bureau de poste . . . . .	367
15.8.2	Temps d'attente dans un tirage sans remise . . . . .	368
15.8.3	Loi de Pascal . . . . .	370
<b>16</b>	<b>Lois discrètes usuelles</b>	<b>371</b>
16.1	La loi binomiale . . . . .	371
16.2	La loi géométrique . . . . .	376
16.3	La loi de Poisson . . . . .	387
16.4	Fonction génératrice . . . . .	397
16.5	Inégalité de Bienaymé-Tchébychev . . . . .	400
16.6	Chaîne de Markov . . . . .	401
<b>17</b>	<b>Variables à densité</b>	<b>403</b>
17.1	Généralités . . . . .	403
17.2	Moments - Théorème de transfert . . . . .	414
17.3	Fonction de variable aléatoire . . . . .	423
<b>18</b>	<b>Lois usuelles</b>	<b>433</b>
18.1	Loi Uniforme . . . . .	433
18.2	Loi Exponentielle . . . . .	443
18.3	Taux de défaillance . . . . .	462
18.4	Les lois normales . . . . .	464
18.5	Loi de Laplace . . . . .	471
18.6	Loi de Cauchy de paramètre 1 . . . . .	474
18.7	Loi de Weibull . . . . .	478
18.8	Loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté . . . . .	480
18.9	Loi de Rayleigh . . . . .	482
18.10	Loi log-normale . . . . .	484
18.11	Loi de Pareto . . . . .	486
18.12	Loi de Gumbel . . . . .	491
18.13	Loi de l'Arcsinus . . . . .	494
<b>19</b>	<b>Convergences</b>	<b>497</b>
19.1	Approximation par une loi normale . . . . .	497
19.2	Convergence en probabilité . . . . .	499
19.3	Convergence en loi . . . . .	506

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	<b>9</b>
<b>20 Estimation</b>	<b>513</b>
20.1 Estimateurs . . . . .	513
20.2 Meilleur estimateur . . . . .	516
<b>Bibliographie</b>	<b>523</b>
<b>Index</b>	<b>525</b>