Chapitre 1

Propagation de la lumière

Khôlle 1

Fibre optique

Partie 1 Questions de cours

1. Définir l'indice optique d'un milieu transparent
2. Établir la relation entre la longueur λ d'onde d'une radiation dans un milieu d'indice n et la longueur d'onde λ_0 dans le vide.
3. Définir le modèle de l'optique géométrique et indiquer ses limites.

Partie 2 Problème – Fibre optique

(D'après concours Mines 2011 – PC – Epreuve de physique II)

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure 1 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox), de diamètre 2a et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 inferieur à n. Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes, transparents et non chargés. Un rayon situé dans le plan (Oxy) entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ. Les rayons lumineux sont supposés issus d'une radiation monochromatique de fréquence f et de longueur d'onde λ dans le milieu constituant le cœur.

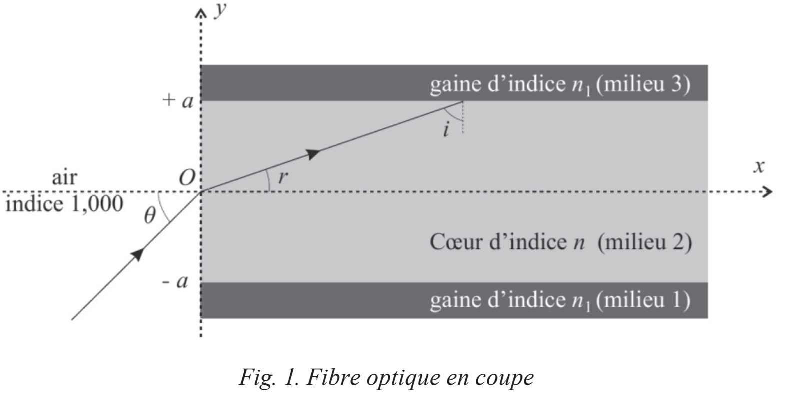


Fig. 1. Fibre optique en coupe

Donnée : célérité de la lumière : $3{,}0\times10^8\ \text{m.s}^{-1}$

1. Les différents angles utiles sont représentés sur la figure 1. A quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_{lim} l'angle d'incidence limite.

2. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_{lim} dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_{lim}. En déduire l'expression de l'ouverture numérique $ON = \sin\theta_{lim}$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.

3. Donner la valeur numérique de ON pour n = 1,50 et $n_1 = 1,47$.

On considère une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_{lim}. On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

4. Pour quelle valeur de l'angle θ, le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal ? maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L, c, n et n_1.

5. On pose $2\Delta = 1 - \left(\dfrac{n_1}{n}\right)^2$. On admet que pour les fibres optiques $\Delta \ll 1$.

Donner dans ce cas l'expression approchée de δt en fonction de L, c, n et Δ. On conservera cette expression de δt pour la suite du problème.

(On rappelle le développement limité au premier ordre pour $x \ll 1$: $(1+x)^n \approx 1 + nx$).

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_{lim}. La figure 2 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t.

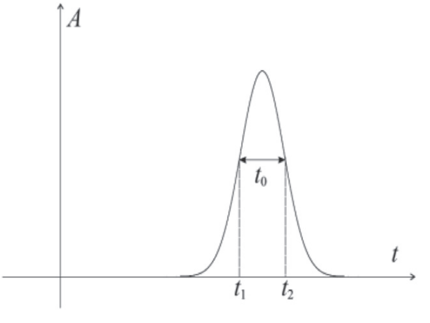


Fig. 2. Impulsion lumineuse

6. Reproduire la figure 2 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t'_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées « bits ») périodiquement avec une fréquence d'émission F.

7. En supposant t_0 négligeable devant δt, quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $BP = L_{max} \times F$.

8. Exprimer la bande passante BP en fonction de c, n et Δ.

9. Calculer la valeur numérique de Δ et de la bande passante BP (exprimée en MHz.km) avec les valeurs de n et n_1 données dans la question 3. Pour un débit d'information de $F = 100$ Mbits/s $= 100$ MHz, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de L_{max} obtenue.

Khôlle 1
Correction

Partie 1 Questions de cours

1. L'indice optique n d'un milieu transparent est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide c par la vitesse de la lumière v dans le milieu transparent : $n=\frac{c}{v}$; $v \leq c$ donc $n \geq 1$; n n'a pas d'unité.

2. La fréquence est indépendante du milieu dans lequel l'onde se propage par contre la longueur d'onde est modifiée.

   $v=\lambda \times f$ et $c=\lambda_0 \times f$

   Donc :

$$n=\frac{c}{v}=\frac{\lambda_0 f}{\lambda f}=\frac{\lambda_0}{\lambda}$$

   Ou encore :

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n}$$

3. L'optique géométrique décrit la propagation de l'énergie lumineuse sous forme de trajectoires appelées rayon lumineux.
   - Les rayons lumineux se propagent en ligne droite dans un milieu transparent (d'indice n), homogène (n indépendant de la position) et isotrope (n indépendant de la direction de propagation). (Propagation rectiligne de la lumière).
   - Le trajet suivi par la lumière entre deux points situés sur un même rayon est indépendant du sens de propagation de la lumière entre ces deux points (principe du retour inverse de la lumière).
   - Les rayons issus d'une même source ou de sources (ponctuelles) distinctes se propagent indépendamment les uns des autres ; il n'y a pas d'interférences (principe de l'indépendance des rayons lumineux).

   Ce modèle est valable si les dimensions caractéristiques du problème sont grandes devant la longueur d'onde ; cela permet de ne pas observer les phénomènes de diffraction.

Partie 2 Problème – Fibre optique

1. À l'interface entre le cœur et la gaine, on peut appliquer la deuxième loi de Snell-Descartes pour la réfraction de la lumière :

$$n \times \sin i = n_1 \times \sin i_1$$

Dans le cas présent $n > n_1$; la lumière va vers un milieu moins réfringent et il y a possibilité de réflexion totale.

À la limite $i_1 = \pi / 2$, donc $\sin i_1 = 1$ et $n \times \sin i_{lim} = n_1$ ou encore :

$$i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$$

Le rayon reste confiné dans le cœur lorsqu'il y a réflexion totale, c'est-à-dire pour $i > i_{lim}$.

2. À l'interface air-cœur, la deuxième loi de Snell-Descartes pour la réfraction de la lumière nous donne $n_{air} \times \sin\theta = n \times \sin r$ soit $\sin\theta = n \times \sin r$.

De plus d'après la géométrie de la fibre :

$$r = \frac{\pi}{2} - i$$

En combinant les deux relations :

$$\sin\theta = n \times \sin r = n \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n \times \cos i$$

$$\sin\theta = n \times \cos i$$

Les fonctions sinus et cosinus étant respectivement croissante et décroissante sur l'intervalle $[0\,; \pi/2]$, la condition $i > i_{lim}$ devient :

$\theta < \theta_{lim}$ avec $\sin\theta_{lim} = n \times \cos i_{lim}$

Ouverture numérique :

$$ON = \sin\theta_{lim}$$

On utilise la relation trigonométrique : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$ON = \sin\theta_{lim} = n \times \cos i_{lim}$$

$$ON = n \times \sqrt{1 - \sin^2(i_{lim})} = n \times \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2} = \sqrt{n^2 - n_1^2}$$

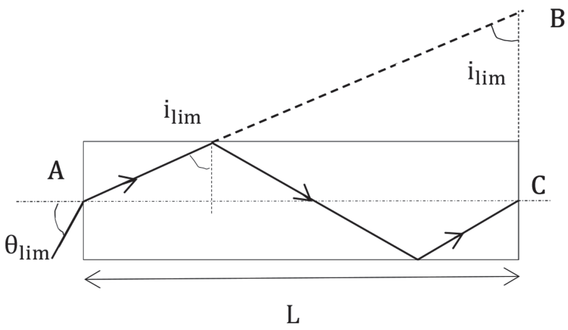
Finalement : $ON = \sin\theta_{lim} = \sqrt{n^2 - n_1^2}$

3. Application numérique :

$$ON = \sqrt{n^2 - n_1^2} = \sqrt{1{,}50^2 - 1{,}47^2} = 0{,}298$$

CORRECTION

4.



Dans la fibre tous les rayons se déplacent à la même vitesse :

$$v = \frac{c}{n}$$

Le temps de parcours minimal t_{min} correspond donc à la distance parcourue la plus courte, soit L ; les rayons incidents dans la fibre arrivent en incidence normale donc $\theta_{min} = 0$ rad.

On obtient la relation :

$$v = \frac{L}{t_{min}}$$

Le temps de parcours maximal t_{max} correspond donc à la distance parcourue la plus longue dans la fibre, cette distance est équivalente à la distance AB soit $\frac{L}{\sin i_{lim}}$ dans le triangle rectangle (ABC); les rayons incidents dans la fibre arrivent en incidence maximale (limite) donc $\theta_{max} = \theta_{lim}$.

On obtient la relation :

$$v = \frac{AB}{t_{max}} = \frac{\frac{L}{\sin i_{lim}}}{t_{max}}$$

$$\delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{\frac{L}{\sin i_{lim}}}{v} - \frac{L}{v} = \frac{L}{v}\left(\frac{1}{\sin i_{lim}} - 1\right)$$

Or :

$$v = \frac{c}{n} \text{ et } \sin i_{lim} = \frac{n_1}{n}$$

On obtient finalement :

$$\delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{nL}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right)$$

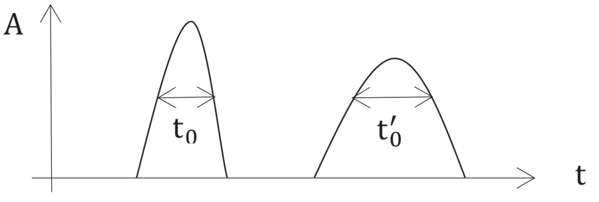
5. $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2$ donc $\frac{n}{n_1} = (1-2\Delta)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \Delta$

Alors :

$$\delta t = \frac{nL}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right) \approx \frac{nL\Delta}{c}$$

6. $t'_0 = t_0 + \delta t$

L'amplitude de l'impulsion diminue du fait de son étalement (conservation de l'énergie lumineuse transportée).



7. Si la durée T (période) séparant 2 impulsions est trop brève, les signaux se recouvrent en sortie rendant le décodage impossible.

Pour qu'il n'y ait pas recouvrement il faut donc $\delta t < T$.

Or :

$\delta t = \frac{nL\Delta}{c}$ et $F = \frac{1}{T}$

$$0 < \frac{nL\Delta}{c} < \frac{1}{T}$$

Donc :

$$F < \frac{c}{nL\Delta}$$

8. À la limite :

$$F = \frac{c}{nL_{max}\Delta}$$

La bande passante est alors :

$$BP = L_{max}F \;\text{ soit } BP = \frac{c}{n\Delta}$$

9. $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2$

Donc :

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1,47}{1,50}\right)^2\right) = 0,0198$$

CORRECTION