Compléments d'algèbre linéaire — 1

Compétences

On cherchera à :

- ▷ Savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou est une base.
  Exercices 1 à 3
- ▷ Savoir montrer qu'un endomorphisme est un projecteur, une symétrie ou une homothétie et connaître les propriétés de ces endomorphismes remarquables.
  Exercices 4 à 6
- ▷ Savoir reconnaître une équation linéaire.
  Exercice 7
- ▷ Savoir montrer qu'une somme de sous-espaces vectoriels est directe et savoir en tirer les conséquences (unicité de la décomposition d'un vecteur, dimension de la somme).
  Exercices 8 à 11
- ▷ Savoir montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme et savoir en tirer les conséquences d'un point de vue matriciel.
  Exercices 12 et 13
- ▷ Savoir montrer que deux matrices sont semblables.
  Exercices 15 et 16
- ▷ Savoir calculer et utiliser la trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.
  Exercices 17 et 18
- ▷ Savoir calculer des déterminants, particulièrement ceux de Vandermonde ou des matrices triangulaires supérieures par blocs.
  Exercices 19 à 22

Coup d'œil sur le chapitre

Consolider les acquis de PCSI sur les notions d'espaces et de sous-espaces vectoriels, de familles libres, de bases, d'applications linéaires, d'endomorphismes et de représentations matricielles de ceux-ci est le premier objectif.
Le fil rouge de ces révisions est de travailler la fluidité du passage du registre géométrique (applications linéaires, famille de vecteurs,...) au registre matriciel, ce qui sera particulièrement utile lors de l'étude de la similitude des matrices.

Le concept de somme directe de n sous-espaces vectoriels généralise la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires vue en première année. Il sera, par la suite, fréquent de recourir à la décomposition d'un espace vectoriel en la somme directe de sous-espaces vectoriels, d'où la nécessité de comprendre en profondeur aussi bien la définition que les caractérisations.

La stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme a une caractérisation matricielle d'une grande utilité dans le calcul ultérieur de certains polynômes caractéristiques, et, plus généralement, pour la réduction d'un endomorphisme.

Il en découle la nécessité de savoir calculer les déterminants de matrices triangulaires supérieures par blocs ou diagonales par blocs. Dans un souci d'efficacité, la formule de calcul des déterminants de Vandermonde, d'occurrences fréquentes, est également nécessaire.

Ensuite, la notion centrale de matrices semblables, c'est-à-dire de matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases, prépare, comme l'ensemble de ce chapitre, le chapitre suivant où il sera question de diagonalisation et de trigonalisation d'endomorphismes et de matrices carrées.

Enfin, la notion de trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme est introduite. Elle constituera, ultérieurement, un moyen incontournable de vérification du calcul des valeurs propres.

Le saviez-vous ?

La notion d'espace vectoriel a été introduite dans les années 1840 par Arthur Cayley (1821-1895) et Hermann Grassmann (1809-1877). Le premier a considéré des n-uplets de réels et a défini dessus des opérations. Le second a fourni une théorie très confuse, incomprise de ses contemporains, mais qui avait l'avantage de ne pas dépendre d'une base.
Les espaces vectoriels ont été formalisés en 1888 par Giuseppe Peano (1858-1932) et sont devenus le cadre naturel de la géométrie, mais aussi de nombreux autres domaines ; on peut concevoir des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions, des polynômes ou des matrices. L'algèbre linéaire permet en effet d'utiliser l'intuition géométrique dans des théories mathématiques dépourvues de support intuitif apparent.

Énoncés des exercices

Révisions de PCSI

Exercice 1. $(\star)$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, telle que, pour tout entier n, $\deg P_n < \deg P_{n+1}$ (une famille de polynômes à degrés échelonnés).
Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales et A la matrice de E définie par : $A = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n)$.
Montrer que la famille $\left(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\right)$ est une base de E.

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que :

$$u^{p-1} \neq \tilde{0} \text{ et } u^p = \tilde{0} \text{ (l'endomorphisme nul).}$$

1. Justifier l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0_E$.
2. Montrer que la famille $\left(a, u(a), u^2(a), \cdots, u^{p-1}(a)\right)$ est libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$, puis que $u^n = \tilde{0}$.

Exercice 4.

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que : $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$ (l'endomorphisme nul).
2. Montrer alors que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Exercice 5.

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p et q de E, vérifiant

$$p \circ q = q \circ p.$$

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que : $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.
3. Montrer que : $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

Exercice 6.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que : si p est le projecteur de E tel que $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$, alors $s = 2p - \operatorname{Id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
2. Réciproquement, vérifier que : si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $p = \dfrac{1}{2}(s + \operatorname{Id}_E)$ est le projecteur de E tel que $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$.
3. Définir, à partir de p, le projecteur q de E tel que $\operatorname{Im} q = G$ et $\operatorname{Ker} q = F$, ainsi que la symétrie s' par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 7.

On recherche tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(0) = -2,\ P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 3.$$

1. Formaliser ce problème sous la forme d'une équation linéaire.
2. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
3. Après avoir vérifié que $P_0 = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{3}{2}X - 2$ est l'une d'elles, décrire l'ensemble de toutes les solutions du problème.

Produit et somme d'espaces vectoriels

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est une somme directe, alors :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \{0_E\}).$$
2. Montrer que, dans le cas $n = 2$, il y a même équivalence, c'est-à-dire :
$$E_1 + E_2 \text{ est une somme directe} \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.$$
3. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple choisi dans $\mathbb{R}^2$, que, dans le cas $n > 2$, la réciproque de l'implication de la première question est fausse.

Exercice 9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un entier naturel non nul et F_1, F_2,.., F_p des sous espaces vectoriels de E.

1. Montrer que : si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe alors toute famille $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ de vecteurs non nuls de $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ est libre.

2. On suppose, réciproquement, que toute famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de vecteurs non nuls de $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ est libre.

   a) Montrer que : si $J \subset [\![1,p]\!]$, toute famille $(x_i)_{i\in J}$ de vecteurs non nuls de $\prod_{j\in J} F_j$ est libre.

   b) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

3. Énoncer le résultat obtenu.

Exercice 10.

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

$$(f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) = \tilde{0}, \text{ où } \tilde{0} \text{ est l'endomorphisme nul de } E.$$

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

2. On pose $p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_E)$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

   a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis, pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.

   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.

   c) Montrer, en exhibant f^{-1}, que f est bijective.

   d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{-n} = (f^{-1})^n$. La formule obtenue à la question 2. b) est-elle valable pour tout n de $\mathbb{Z}$?

Exercice 11.

f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont n scalaires deux à deux distincts. ($n \geqslant 2$)

Montrer que la somme des noyaux des endomorphismes $(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$, $i \in [\![1,n]\!]$, est directe.

Sous-espaces stables et matrices par blocs

Exercice 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E qui commutent.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par u.

2. Donner la structure de la matrice de u dans une base de E adaptée à $\mathrm{Ker}\,(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 13. $(\star)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$.
Soit V un sous-espace de E stable par u et p un projecteur tel que $\operatorname{Im} p = V$.

Soit $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que : $\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$.
2. Montrer que $q \circ u = u \circ q$, que $\operatorname{Im} q \subset V$, puis que $p \circ q = q$.
3. Montrer que q est un projecteur dont le noyau est stable par u et est un supplémentaire de V.

D'après Centrale-Supélec

Exercice 14.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer que : si $N = \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline 0_{p,n} & C \end{array}\right)$, alors $\operatorname{rg} N = n + \operatorname{rg} C$.
2. Montrer que : si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & C \end{array}\right)$, alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} C$.

Matrices semblables

Exercice 15.

Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 16. $(\star)$

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r telle que $A^2 = 0_n$.
Montrer que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

D'après Mines-Ponts

Trace

Exercice 17.

1. A et B étant deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB - BA = I_n.$$

3. Montrer que, si deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $AB - BA = A$, alors A n'est pas inversible.
4. Montrer que, A étant une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\text{si tr } \left(A^T A\right) = 0, \text{ alors } A = A^T = 0.$$

Exercice 18.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace non nulle et
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M)\, A - \operatorname{tr}(A)\, M \end{array} \right. .$$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont on précisera l'image et le noyau.

Déterminants

Exercice 19.

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a & 4a^3+5a^2 \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b & 4b^3+5b^2 \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c & 4c^3+5c^2 \\ 1 & 2d+3 & 3d^2+4d & 4d^3+5d^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 20.

1. Calculer le déterminant $V(x,a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c & d \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ x^4 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.
2. Développer $V(x,a,b,c,d)$ par rapport à sa première colonne.
3. En déduire $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

Exercice 21.

Soit A, B, C et D quatre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$ et D inversible.
On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$.
Calculer $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} D & 0_n \\ \hline -C & D^{-1} \end{array}\right)$, où 0_n est la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire $\det M$.

Exercice 22.

A et B étant deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que :

$$\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline I_n & B \end{array}\right) = \det(B-A) \text{ et } \det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) = \det(A+B)\times\det(A-B).$$

Un petit coup de pouce

Ex. 1. Supposer l'existence d'une combinaison linéaire nulle d'une famille finie de ces polynômes, les coefficients de cette combinaison linéaire n'étant pas tous nuls. L'ensemble des indices de ces coefficients non nuls admet un plus grand élément qui est le degré de cette combinaison linéaire. Apparaît alors une contradiction.
Par définition, une famille infinie de vecteurs est libre lorsque n'importe laquelle de ses sous-familles finies est libre.

Ex. 2. Si la dimension de E est connue, le travail est divisé par deux : on peut se contenter de montrer que la famille est libre, ou alors qu'elle est génératrice.
Pour la liberté, à partir d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille considérée, on peut faire apparaître un polynôme dont le nombre de racines distinctes est strictement supérieur au degré.

Ex. 4. 1. À partir de $p\circ q+q\circ p=\tilde{0}$, on peut composer à gauche, puis à droite, par q pour obtenir les relations permettant de conclure à $p\circ q=q\circ p=\tilde{0}$.
2. Pour la deuxième égalité, les choses sont simplifiées par l'utilisation de :

si p est un projecteur, alors $\operatorname{Im} p=\{x\in E \mid p(x)=x\}$.

Ex. 5. 3. Pour l'une des inclusions, utiliser $E=\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Im} p$, donc la possibilité de décomposer tout vecteur de E en la somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$. Si le vecteur considéré est dans $\operatorname{Ker}(p\circ q)$, il reste à montrer que sa composante suivant $\operatorname{Im} p$ est dans $\operatorname{Ker} q$.
Pour l'autre inclusion, commencer par : $\operatorname{Ker} p\subset\operatorname{Ker}(p\circ q)$ et
$\operatorname{Ker} q\subset\operatorname{Ker}(p\circ q)$.

Ex. 6. Si s est une symétrie vectorielle, son axe est $F=\{x\in E \mid s(x)=x\}$, sa direction $G=\{x\in E \mid s(x)=-x\}$. On dit que s est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

Ex. 9. 2. a) Une famille contenant une famille liée est liée.
b) Montrer que : si $(y_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de vecteurs de $F_1\times F_2\times\cdots\times F_p$ telle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i=0_E$, alors elle comporte au moins un vecteur nul, puis, par un nombre fini d'itérations, que tous ses vecteurs sont nuls.